1976 年京大文 $\boxed{6}$

（i）

$f(x)=\alpha x^3-\beta x$ とする。

2 点 $P,\ Q$ における接線は、いずれも線分 PQ と垂直であるから、傾きは等しい。

2 本の接線の傾きを m とすると　$f'(x)=3\alpha x^2-\beta=m$　$x^2=\dfrac{m+\beta}{3\alpha}$

$\dfrac{m+\beta}{3\alpha}>0$ の条件下で、$f'(x)=m$ となる x は　$\therefore x=\pm\sqrt{\dfrac{m+\beta}{3\alpha}}$　これらが $P,\ Q$ の x 座標である。

$f(x)$ は奇関数であるから、$P,\ Q$ は原点に関して対称な位置にある。（証明終）

（ii）

$t\neq 0$ として、$P(t,\ \alpha t^3-\beta t),\ Q(-t,\ -\alpha t^3+\beta t)$ とする。

線分 PQ の傾きは　$\dfrac{\alpha t^3-\beta t}{t}=\alpha t^2-\beta$　$P,\ Q$ における接線の傾きは　$3\alpha t^2-\beta$

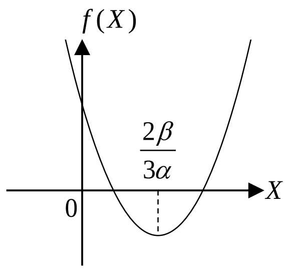
これより　$(\alpha t^2-\beta)(3\alpha t^2-\beta)=-1$　$3\alpha^2t^4-4\alpha\beta t^2+\beta^2+1=0$ ――①

$t=0$ は①の解ではない。t に関する 4 次方程式①が、実数解を持てばよい。

①は t^2 に関する 2 次方程式であり、$f(X)=3\alpha^2X^2-4\alpha\beta X+\beta^2+1=0$ が、正の実数解を持てばよい。

$f(0)=\beta^2+1>0$ であり、$F(X)=3\alpha^2\left(X-\dfrac{2\beta}{3\alpha}\right)^2-\dfrac{1}{3}\beta^2+1$ より

軸 $\dfrac{2\beta}{3\alpha}>0$　$\therefore \alpha\beta>0$　$-\dfrac{1}{3}\beta^2+1\leqq 0$　$\beta^2\geqq 3$　$\therefore |\beta|\geqq\sqrt{3}$



$(\alpha,\ \beta)$ の範囲は　$\alpha>0,\ \beta\geqq\sqrt{3}$ または $\alpha<0,\ \beta\leqq-\sqrt{3}$　……（答）