1977 年京大文$\boxed{5}$

$n=1$ のとき　$1^p-1=0$ であるから、p で割り切れ、成立。
$n=k$ のとき　k^p-k は p で割り切れると仮定する。

$$(k+1)^p-(k+1)=(k^p-k)+{}_pC_{p-1}k^{p-1}+\cdots+{}_pC_2k^2+{}_pC_1k$$

仮定により、k^p-k は p で割り切れる。
また、$0<q<p$ のとき

$${}_pC_q=\frac{p!}{(p-q)!q!}=\frac{p}{q}\cdot\frac{(p-1)!}{(p-q)!(q-1)!}=\frac{p}{q}\cdot\frac{(p-1)!}{\{(p-1)-(q-1)\}!(q-1)!}=\frac{p}{q}\cdot{}_{p-1}C_{q-1}\quad\therefore q\cdot{}_pC_q=p\cdot{}_{p-1}C_{q-1}$$

p が素数のとき、p と q は互いに素であるから、${}_pC_q$ は p で割り切れる。
すなわち、$p-1$ 個の二項係数 ${}_pC_1$，${}_pC_2$，$\cdots$，${}_pC_{p-1}$ は、すべて p で割り切れる。

したがって、$(k+1)^p-(k+1)$ は p で割り切れるから、$n=k+1$ でも成立。
以上により示された。（証明終）

※2009 年東大理$\boxed{1}$文$\boxed{2}$で類題が出題されている。本問の方が、誘導がないので難しい。