1977年京大理 $\boxed{5}$

（i）

座標平面において、$A\left(-\dfrac{a}{2},\ 0\right),\ B\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right),\ C(x,\ y)\ (y>0)$ とおき、$AC+BC=m\,(>a)$ を保ちながら、C が動くとする。AB を底辺とすると、高さ y が最大になるとき、$\triangle ABC$ の面積は最大である。

$$\sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2}=m \qquad \sqrt{x^2+ax+\frac{a^2}{4}+y^2}=m-\sqrt{x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2}$$

両辺を2乗し、整理すると

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}+y^2=m^2+\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2\right)-2m\sqrt{x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2} \qquad 2m\sqrt{x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2}=m^2-2ax$$

さらに両辺を2乗し、整理すると

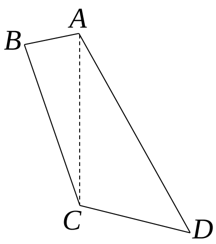
$$4m^2\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2\right)=m^4-4am^2x+4a^2x^2 \quad 4(m^2-a^2)x^2+4m^2y^2=m^2(m^2-a^2) \quad \therefore \frac{4x^2}{m^2}+\frac{4y^2}{m^2-a^2}=1$$

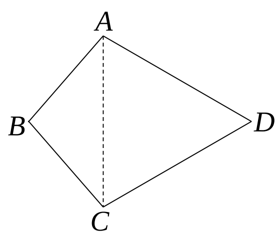
したがって、C は楕円 $\dfrac{4x^2}{m^2}+\dfrac{4y^2}{m^2-a^2}=1$ 上を動く。y が最大になるのは、C が $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{m^2-a^2}}{2}\right)$ であるときで、

このとき $\triangle ABC$ は二等辺三角形である。（証明終）

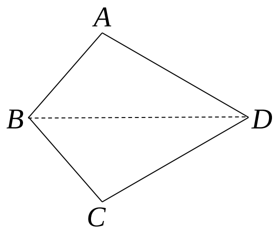
（ii）

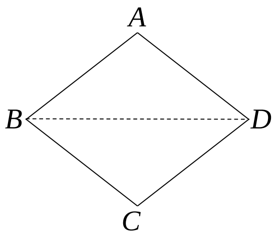
凸四角形 $ABCD$ に対し、以下の操作を行う。
対角線 AC を固定し、$AB+CB$ が一定になるように B を動かし、
$AD+CD$ が一定になるように D を動かす。
四角形 $ABCD$ の面積が最大になるのは、$AB=CB,\ AD=CD$
のときである。



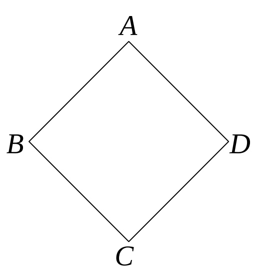


対角線 BD を固定し、$BA+DA$ が一定になるように A を動かし、
$BC+DC$ が一定になるように C を動かす。
四角形 $ABCD$ の面積が最大になるのは、$BA=DA,\ BC=DC$
のときである。
このとき、四角形 $ABCD$ の4辺の長さは等しく、これを l とする。





菱形 $ABCD$ の頂角の1つを、θ とする。面積は $l^2\sin\theta$ で与えられる。
これが最大になるのは、$\theta=90^\circ$ のときである。



以上により、周囲の長さが一定の四角形のうち、面積最大のものは
正方形である。（証明終）