1977年京大理 $\boxed{6}$

(i)

(2)、(4)より、$0 \leqq x \leqq a$ のとき　$g'(x) \geqq f(x) > 0$　$\therefore g'(x) > 0$

$0 \leqq x \leqq a$ において、$g(x)$ は単調増加。(3)より $g(0) = 0$ であるから　$\therefore g(a) > 0$　(証明終)

(ii)

(1)より　$f(a) > 0,\ g(a) > 0$ であるから、$a < a + \dfrac{f(a)}{g(a)}$ である。

$f(x)$ は微分可能であるから、平均値の定理より

$$\frac{f\left(a + \dfrac{f(a)}{g(a)}\right) - f(a)}{\dfrac{f(a)}{g(a)}} = f'(c) \quad a \leqq c \leqq a + \frac{f(a)}{g(a)}$$

を満たす実数 c が存在する。$f'(c) = -g(c)$ より

$$f\left(a + \frac{f(a)}{g(a)}\right) - f(a) = -\frac{f(a)}{g(a)} g(c) \qquad f\left(a + \frac{f(a)}{g(a)}\right) = \{g(a) - g(c)\} \frac{f(a)}{g(a)}$$

これより、$f\left(a + \dfrac{f(a)}{g(a)}\right)$ と $g(a) - g(c)$ の符号は一致する。

$g(a) - g(c) = 0$ のとき　$f\left(a + \dfrac{f(a)}{g(a)}\right) = 0$ となるから、題意を満たす。

$g(a) - g(c) < 0$ のとき　$f\left(a + \dfrac{f(a)}{g(a)}\right) < 0$ となり、$f(a) > 0$ であるから、題意を満たす。

$g(a) - g(c) > 0$ のとき　$g(x)$ は微分可能であるから、平均値の定理より

$$\frac{g(c) - g(a)}{c - a} = g'(b) \quad a < b \leqq c \leqq a + \frac{f(a)}{g(a)}$$

を満たす実数 b が存在する。(2)より $g'(b) \geqq f(b)$ であるから

$$0 > \frac{g(c) - g(a)}{c - a} = g'(b) \geqq f(b) \qquad \therefore f(b) < 0$$

$f(a) > 0$ であるから、$a < y < b \leqq a + \dfrac{f(a)}{g(a)}$ において $f(y) = 0$ となる実数 y が存在し、題意を満たす。

以上により示された。(証明終)