1977 年京大理$\boxed{4}$文$\boxed{4}$共通

（i）

1 回目に出た目が m $(1\leqq m\leqq 6)$ 以下ならば、2 回目を振ることにする。

得点が m 以下になるのは、1 回目に m 以下の目を出し、2 回目にも m 以下の目を出したとき。

1 以上 m 以下のいずれの得点についても、確率は $\dfrac{m}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{m}{36}$

得点が $m+1$ 以上になるのは、1 回目に $m+1$ 以上の目を出すか、1 回目に m 以下の目を出して 2 回目に $m+1$ 以上の目を出したとき。$m+1$ 以上のいずれの得点についても、確率は $\dfrac{1}{6}+\dfrac{m}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{m+6}{36}$

得点の期待値は

$$\frac{m}{36}\sum_{k=1}^{m}k+\frac{m+6}{36}\sum_{k=m+1}^{6}k=\frac{m}{36}\cdot\frac{m(m+1)}{2}+\frac{m+6}{36}\left\{21-\frac{m(m+1)}{2}\right\}=\frac{7(m+6)}{12}-\frac{m(m+1)}{12}$$
$$=-\frac{1}{12}(m^2-6m-42)=-\frac{1}{12}\left\{(m-3)^2-51\right\}=-\frac{1}{12}(m-3)^2+\frac{17}{4}$$

$m=3$ のとき最大値 $\dfrac{17}{4}$ をとるから、1 回目に 3 以下の目が出たら、2 回目を振ればよい。……(答)

（ii）

1 回目に出た目が m $(1\leqq m\leqq 6)$ 以下ならば、2 回目を振ることにする。

さらに、2 回目を振ったとき、出た目が n $(1\leqq n\leqq 6)$ 以下ならば、3 回目を振ることにする。

1 回で振るのをやめたとき、$m+1$ 以上のいずれの得点についても、確率は $\dfrac{1}{6}$

2 回で振るのをやめたとき、$n+1$ 以上のいずれの得点についても、確率は $\dfrac{m}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{m}{36}$

3 回目を振ったとき、1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれの得点についても、確率は $\dfrac{m}{6}\cdot\dfrac{n}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{mn}{216}$

得点の期待値は

$$\frac{1}{6}\sum_{k=m+1}^{6}k+\frac{m}{36}\sum_{k=n+1}^{6}k+\frac{mn}{216}\sum_{k=1}^{6}k=\frac{1}{6}\left\{21-\frac{m(m+1)}{2}\right\}+\frac{m}{36}\left\{21-\frac{n(n+1)}{2}\right\}+\frac{mn}{216}\cdot 21$$
$$=\frac{7}{2}-\frac{m(m+1)}{12}+\frac{7m}{12}+m\left\{-\frac{n(n+1)}{72}+\frac{7n}{72}\right\}=\frac{7}{2}-\frac{1}{12}(m^2-6m)+\frac{m}{72}(-n^2+6n)$$
$$=\frac{7}{2}-\frac{1}{12}(m^2-6m)+\frac{m}{72}\left\{-(n-3)^2+9\right\}$$

m を固定して考えたとき、期待値が最大になるのは $n=3$ のときで、このときの期待値は

$$\frac{7}{2}-\frac{1}{12}(m^2-6m)+\frac{m}{8}=-\frac{1}{12}\left(m^2-\frac{15}{2}m\right)+\frac{7}{2}=-\frac{1}{12}\left(m-\frac{15}{4}\right)^2+\frac{299}{64}$$

$\dfrac{15}{4}=3.75$ で、最も近い整数 m は 4 であるから、$m=4$ のとき最大値 $\dfrac{14}{3}$ をとる。

1 回目に 4 以下の目が出たら 2 回目を振り、2 回目に 3 以下の目が出たら 3 回目を振ればよい。……(答)