1978年京大理 $\boxed{6}$

（i）

$\cos(m-n)x=\cos mx\cos nx+\sin mx\sin nx$ ——① $\cos(m+n)x=\cos mx\cos nx-\sin mx\sin nx$ ——②

①－②より

$\cos(m-n)x-\cos(m+n)x=2\sin mx\sin nx$ $\therefore \sin mx\sin nx=\dfrac{1}{2}\{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\}$ （証明終）

$m\neq n$ のとき $I_{m,\,n}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\}dx=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(m-n)x}{m-n}-\dfrac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$

$m=n$ のとき $I_{m,\,n}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2mx)dx=\dfrac{1}{2}\left[x-\dfrac{\sin 2mx}{2m}\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$

以上により $m\neq n$ のとき $I_{m,\,n}=0$ 、$m=n$ のとき $I_{m,\,n}=\pi$ ……(答)

（ii）

$(\sin kx-a\sin mx-b\sin nx)^2$

$=\sin^2 kx+a^2\sin^2 mx+b^2\sin^2 nx-2a\sin kx\sin mx-2b\sin kx\sin nx+2ab\sin mx\sin nx$

(i)より $f(k)=\begin{cases}(a^2+b^2)\pi+2ab\,I_{m,\,n} & (k=0)\\ (1+a^2+b^2)\pi-2a\,I_{k,\,m}-2b\,I_{k,\,n}+2ab\,I_{m,\,n} & (1\leqq k\leqq 5)\end{cases}$

$m\neq n$ のとき $f(k)=\begin{cases}(a^2+b^2)\pi & (k=0)\\ (1+a^2+b^2)\pi-2a\,I_{k,\,m}-2b\,I_{k,\,n} & (1\leqq k\leqq 5)\end{cases}$

$m>5,\ n>5$ のとき

$$E=(1+a^2+b^2)\pi\sum_{k=0}^{5}p(k)-\pi\,p(0)=(1+a^2+b^2)\pi\cdot(1+5+10+10+5+1)\left(\frac{1}{2}\right)^5-\frac{1}{32}\pi=\left(\frac{31}{32}+a^2+b^2\right)\pi$$

E は、$a=b=0$ において最小値 $\dfrac{31}{32}\pi$ をとる。

$1\leqq m\leqq 5,\ n>5$ のとき

$$E=\left(\frac{31}{32}+a^2+b^2\right)\pi-2a\pi\,p(m)=\left(\frac{31}{32}+a^2+b^2-2a\,p(m)\right)\pi=\left\{\frac{31}{32}-(p(m))^2+(a-p(m))^2+b^2\right\}\pi$$

E は、$a=p(m),\ b=0$ において最小値 $\left\{\dfrac{31}{32}-(p(m))^2\right\}\pi$ をとる。

$p(1)=p(4)=\dfrac{5}{32},\ p(2)=p(3)=\dfrac{5}{16},\ p(5)=\dfrac{1}{32}$ であるから

$m=2,\ 3$ かつ $a=\dfrac{5}{16},\ b=0$ のとき、最小値 $\left(\dfrac{31}{32}-\dfrac{25}{256}\right)\pi=\dfrac{223}{256}\pi$ をとる。

$1\leqq n\leqq 5,\ m>5$ のとき

対称性より、$n=2,\ 3$ かつ $a=0,\ b=\dfrac{5}{16}$ のとき、最小値 $\dfrac{223}{256}\pi$ をとる。

$1 \leqq m \leqq 5,\ 1 \leqq n \leqq 5$ のとき

$$E = \left(\frac{31}{32} + a^2 + b^2\right)\pi - 2a\pi\, p(m) - 2b\pi\, p(n) = \left\{\frac{31}{32} + a^2 + b^2 - 2a\, p(m) - 2b\, p(n)\right\}\pi$$

$$= \left\{\frac{31}{32} - (p(m))^2 - (p(n))^2 + (a - p(m))^2 + (b - p(n))^2\right\}\pi$$

E は、$a = p(m),\ b = p(n)$ において最小値 $\left\{\frac{31}{32} - (p(m))^2 - (p(n))^2\right\}\pi$ をとるから、

$m = 2,\ n = 3$ または $m = 3,\ n = 2$ のとき、最小値 $\left(\frac{31}{32} - \frac{25}{256} - \frac{25}{256}\right)\pi = \frac{99}{128}\pi$ をとる。

$m = n$ のとき　$f(k) = \begin{cases} (a^2 + b^2 + 2ab)\pi & (k = 0) \\ (1 + a^2 + b^2 + 2ab)\pi - 2a\, I_{k,\,m} - 2b\, I_{k,\,n} & (1 \leqq k \leqq 5) \end{cases}$

$m = n > 5$ のとき　$E = (1 + a^2 + b^2 + 2ab)\pi - \frac{1}{32}\pi = \left\{\frac{31}{32} + (a + b)^2\right\}\pi$

E は $a + b = 0$ のとき最小値 $\frac{31}{32}\pi$ をとる。

$0 \leqq m = n \leqq 5$ のとき

$$E = \left(\frac{31}{32} + a^2 + b^2 + 2ab\right)\pi - (2a + 2b)\pi\, p(m) = \left\{\frac{31}{32} + a^2 + b^2 + 2ab - 2a\, p(m) - 2b\, p(m)\right\}\pi$$

$$= \left\{\frac{31}{32} + (a + b)^2 - 2(a + b)\, p(m)\right\}\pi = \left\{\frac{31}{32} - (p(m))^2 + (a + b - p(m))^2\right\}\pi$$

E は $a + b = p(m)$ のとき最小値 $\left\{\frac{31}{32} - (p(m))^2\right\}\pi$ をとる。

$a + b = \frac{5}{16}$ かつ $m = n = 2,\ 3$ のとき、最小値 $\left(\frac{31}{32} - \frac{25}{256}\right)\pi = \frac{223}{256}\pi$ をとる。

以上により、E を最小にする $m,\ n,\ a,\ b$ は　$\therefore (m,\ n,\ a,\ b) = \left(2,\ 3,\ \frac{5}{16},\ \frac{5}{16}\right), \left(3,\ 2,\ \frac{5}{16},\ \frac{5}{16}\right)$　……(答)