

1978 年京大理 1 文 1 共通

$$3\left(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}\right) - 2\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right) = c - 3\sqrt[3]{abc} + 2\sqrt{ab}$$

$f(t) = t^3 - 3\sqrt[3]{ab}t + 2\sqrt{ab}$ の $t > 0$ における増減を調べる。

$$f'(t) = 3t^2 - 3\sqrt[3]{ab} = 3(t + \sqrt[6]{ab})(t - \sqrt[6]{ab})$$

増減は右の通りで、 $f(\sqrt[6]{ab}) = \sqrt{ab} - 3\sqrt[3]{ab} + 2\sqrt{ab} = 0$ であるから、 $t > 0$ において $f(t) \geq 0$ が成り立つ。

$$c - 3\sqrt[3]{abc} + 2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\therefore 2\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right) \leq 3\left(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}\right) \quad (\text{証明終})$$

等号成立は、 $\sqrt[3]{c} = \sqrt[6]{ab}$ 、 $c = \sqrt{ab}$ のときである。……(答)

t	0	…	$\sqrt[6]{ab}$	…
$f'(t)$		–	0	+
$f(t)$				