1979年京大文 $\boxed{3}$

数学的帰納法により示す。

$n=1$のとき

${}_1A_0={}_1A_1={}_1A_2={}_1A_3=1$であり、$(1+x^2)(1+x)=1+x+x^2+x^3=\sum_{k=0}^{3}{}_1A_kx^k$ であるから、成立。

$n=m$のとき　$(1+x^2)(1+x)^m=\sum_{k=0}^{m+2}{}_mA_kx^k$ と仮定する。

$1\leqq k\leqq m+2$のとき　${}_{m+1}A_k={}_mA_{k-1}+{}_mA_k$ であるから

$$\sum_{k=0}^{m+3}{}_{m+1}A_kx^k={}_{m+1}A_0+\sum_{k=1}^{m+2}({}_mA_{k-1}+{}_mA_k)x^k+{}_{m+1}A_{m+3}x^{m+3}={}_{m+1}A_0+\sum_{k=0}^{m+1}{}_mA_kx^{k+1}+\sum_{k=1}^{m+2}{}_mA_kx^k+{}_{m+1}A_{m+3}x^{m+3}$$

${}_{m+1}A_0={}_mA_0=1,\ {}_{m+1}A_{m+3}={}_mA_{m+2}=1$であるから

$$\therefore\sum_{k=0}^{m+3}{}_{m+1}A_kx^k=x\sum_{k=0}^{m+2}{}_mA_kx^k+\sum_{k=0}^{m+2}{}_mA_kx^k=(1+x)\sum_{k=0}^{m+2}{}_mA_kx^k=(1+x^2)(1+x)^{m+1}$$

したがって、$n=m+1$でも成立。

以上により示された。（証明終）