1979 年京大理 $\boxed{5}$

（i）

点 $H$ が△ $A_1A_2A_3$ の垂心であるとき、 $A_1H \perp A_2A_3,\ A_2H \perp A_3A_1,\ A_3H \perp A_1A_2$ であるから、

$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OH}$ とすると

$$\overrightarrow{A_1H} \cdot \overrightarrow{A_2A_3} = (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA_1}) \cdot (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_3}) = (\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) \cdot (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_3}) = \left|\overrightarrow{OA_2}\right|^2 - \left|\overrightarrow{OA_3}\right|^2$$

$\left|\overrightarrow{OA_2}\right| = \left|\overrightarrow{OA_3}\right|$ であるから　$\therefore \overrightarrow{A_1H} \cdot \overrightarrow{A_2A_3} = 0$

同様にして、 $\overrightarrow{A_2H} \cdot \overrightarrow{A_3A_1} = 0,\ \overrightarrow{A_3H} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} = 0$ も示されるから、 $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OH}$ で与えられる点 $H$ は、

△ $A_1A_2A_3$ の垂心である。（証明終）

（ii）

6 点を $A_i,\ A_j,\ A_k$ と $A_l,\ A_m,\ A_n$ に分ける。

自然数 $i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n$ には、1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかが、重複なく割り当てられているとする。

$A_i,\ A_j,\ A_k$ がなす三角形の垂心を $H$ 、 $A_l,\ A_m,\ A_n$ がなす三角形の重心を $G$ とすると、（i）より

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j} + \overrightarrow{OA_k},\ \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA_l} + \overrightarrow{OA_m} + \overrightarrow{OA_n}}{3}$$

$H,\ G$ を通る直線上の点 $P$ は、実数 $t$ を用いて、 $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OH} + t\overrightarrow{OG}$ と表される。

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)(\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j} + \overrightarrow{OA_k}) + \frac{t}{3}(\overrightarrow{OA_l} + \overrightarrow{OA_m} + \overrightarrow{OA_n})$$

ここで、 $t = \dfrac{3}{4}$ とすると

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j} + \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_l} + \overrightarrow{OA_m} + \overrightarrow{OA_n}}{4} = \frac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OA_6}}{4}$$

$\dfrac{\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OA_6}}{4}$ は、自然数 $i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n$ の割り当て方によらない定点である。

したがって、 $H,\ G$ を通る直線は、3 点の選び方に無関係な定点を通る。（証明終）

※文系 $\boxed{1}$ は、（ii）の類題である。