1979年京大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

$$af(x)+bf(x-c)=a(1+2\cos x+3\sin x)+b\{1+2\cos(x-c)+3\sin(x-c)\}=1$$

任意のxについて成立するので、

$x=0$のとき　$a(1+2)+b(1+2\cos c-3\sin c)=3a+b+2b\cos c-3b\sin c=1$ ――①

$x=\pi$のとき　$a(1-2)+b(1-2\cos c+3\sin c)=-a+b-2b\cos c+3b\sin c=1$ ――②

$x=\dfrac{\pi}{2}$のとき　$a(1+3)+b(1+2\sin c+3\cos c)=4a+b+2b\sin c+3b\cos c=1$ ――③

②＋①より　$2a+2b=2$　$a+b=1$　$\therefore b=1-a$

①に代入して　$3a+1-a+2b\cos c-3b\sin c=1$　$\therefore 2b\cos c-3b\sin c=-2a$ ――④

③に代入して　$4a+1-a+2b\sin c+3b\cos c=1$　$\therefore 3b\cos c+2b\sin c=-3a$ ――⑤

$b=0$とすると$a=1$であるが、このとき④、⑤より不適。

したがって$b\neq 0$であるから、④、⑤より　$\therefore \cos c=-\dfrac{a}{b},\ \sin c=0$　これより、$c=n\pi$と書ける。

nが奇数のとき　$\cos c=-\dfrac{a}{b}=-1$　$a=b$　$\therefore a=b=\dfrac{1}{2}$

nが偶数のとき　$\cos c=-\dfrac{a}{b}=1$　$a+b=0$　これは$a+b=1$と矛盾するので、不適。

以上により、$a=b=\dfrac{1}{2}$、$c=(2m-1)\pi$であるから、元の式に代入すると

$$\begin{aligned}af(x)+bf(x-c)&=\frac{1}{2}(1+2\cos x+3\sin x)+\frac{1}{2}\{1+2\cos(x+\pi-2m\pi)+3\sin(x+\pi-2m\pi)\}\\&=\frac{1}{2}(1+2\cos x+3\sin x)+\frac{1}{2}(1-2\cos x-3\sin x)=1\end{aligned}$$

確かに成立するので　$\therefore a=b=\dfrac{1}{2},\ c=(2m-1)\pi$　……(答)