1979 年京大理 $\boxed{4}$ 文 $\boxed{4}$ 共通

（i）

$$P=\sum_{k=1}^{6}{p_k}^2={p_1}^2+{p_2}^2+{p_3}^2+{p_4}^2+{p_5}^2+{p_6}^2 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

（ii）

相加平均・相乗平均の関係より

$$P \geqq 2\sqrt{{p_1}^2{p_2}^2}+2\sqrt{{p_3}^2{p_4}^2}+2\sqrt{{p_5}^2{p_6}^2}=2p_1p_2+2p_3p_4+2p_5p_6 \quad \text{——①}$$

等号成立は、 $p_1=p_2$，$p_3=p_4$，$p_5=p_6$ のとき。同様にして

$P \geqq 2p_1p_3+2p_2p_5+2p_4p_6$ ——②　等号成立は、 $p_1=p_3$，$p_2=p_5$，$p_4=p_6$ のとき。

$P \geqq 2p_1p_4+2p_2p_6+2p_3p_5$ ——③　等号成立は、 $p_1=p_4$，$p_2=p_6$，$p_3=p_5$ のとき。

$P \geqq 2p_1p_5+2p_2p_4+2p_3p_6$ ——④　等号成立は、 $p_1=p_5$，$p_2=p_4$，$p_3=p_6$ のとき。

$P \geqq 2p_1p_6+2p_2p_3+2p_4p_5$ ——⑤　等号成立は、 $p_1=p_6$，$p_2=p_3$，$p_4=p_5$ のとき。

$1 \leqq i<j \leqq 6$ なるすべての積 p_ip_j の和を q_n とおく。①～⑤を辺々足すと　$5P \geqq 2q_n$ ——⑥

$P=(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6)^2-2q_n=1-2q_n$ より　$P \geqq 1-5P$　$6P \geqq 1$　$\therefore P \geqq \dfrac{1}{6}$

$P=\dfrac{1}{6}$ となるのは、⑥の等号が成立するときである。

すなわち、①～⑤の等号すべてが成立するときであるから　$\therefore p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=\dfrac{1}{6}$

以上により示された。