

1980 年京大文 2

凸四角形 $ABCD$ の面積を S とする。

$\triangle ABD$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACD$ の面積を、それぞれ S_1, S_2, S_3, S_4 とする。

$S_1 + S_2 = S_3 + S_4 = S$ である。

$AP = tAB$, $AS = (1-t)AD$ であるから、 $\triangle APS$ の面積は、 $t(1-t)S_1$ である。

同様に、 $\triangle BPQ$ 、 $\triangle CQR$ 、 $\triangle DRS$ の面積は、それぞれ

$t(1-t)S_3$, $t(1-t)S_2$, $t(1-t)S_4$ である。

四角形 $PQRS$ の面積は

$$S - t(1-t)(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = S - 2t(1-t)S = (2t^2 - 2t + 1)S \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(2t^2 - 2t + 1)S = \left\{ 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right\} S \text{ より、 } t = \frac{1}{2} \text{ のとき最小値 } \frac{S}{2} \text{ をとる。}$$

