1980 年京大文$\boxed{3}$

$n \geqq 2$ のとき、 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+g(x)$ とする。 $a_n \neq 0$ であり、 $g(x)$ は $n-2$ 次以下の多項式である。

$$\begin{aligned} f(x)+f(x+1) &= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+g(x)+a_n(x+1)^n+a_{n-1}(x+1)^{n-1}+g(x+1) \\ &= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+g(x)+a_n(x^n+nx^{n-1}+\cdots)+a_{n-1}(x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots)+g(x+1) \end{aligned}$$

$n-2$ 次以下の項を、改めて $g_1(x)$ とおくと　$f(x)+f(x+1)=2a_nx^n+(na_n+2a_{n-1})x^{n-1}+g_1(x)$ ――①

次に、 $g(x)$ の不定積分を、 $G(x)$ とする。 $G(x)$ は $n-1$ 次以下の多項式である。

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 f(x+t)dt &= 2\left[\frac{a_n}{n+1}(x+t)^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}(x+t)^n+G(x+t)\right]_0^1 \\ &= \frac{2a_n}{n+1}(x+1)^{n+1}+\frac{2a_{n-1}}{n}(x+1)^n+2G(x+1)-\frac{2a_n}{n+1}x^{n+1}-\frac{2a_{n-1}}{n}x^n-2G(x) \\ &= \frac{2a_n}{n+1}\left\{x^{n+1}+(n+1)x^n+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}+\frac{n(n+1)(n-1)}{6}x^{n-2}+\cdots\right\}+\frac{2a_{n-1}}{n}(x^n+nx^{n-1}+\cdots) \\ &\quad -\frac{2a_n}{n+1}x^{n+1}-\frac{2a_{n-1}}{n}x^n+2G(x+1)-2G(x) \end{aligned}$$

ここで、 $G(x+1)-G(x)$ の $n-1$ 次の項は相殺されるので、 $2G(x+1)-2G(x)$ は $n-2$ 次以下の多項式である。

$\dfrac{n(n-1)}{3}a_nx^{n-2}$ 以外の $n-2$ 次以下の項を、改めて $g_2(x)$ とおくと

$$2\int_0^1 f(x+t)dt = 2a_nx^n+(na_n+2a_{n-1})x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{3}a_nx^{n-2}+g_2(x) \quad \text{――②}$$

①、②より　$f(x)+f(x+1)-2\displaystyle\int_0^1 f(x+t)dt=-\frac{n(n-1)}{3}a_nx^{n-2}+g_1(x)-g_2(x)$

$g_1(x)-g_2(x)$ は $n-2$ 次以下の多項式であり、 $a_n \neq 0$ であるから、右辺は $n-2$ 次の多項式である。

以上により、 $f(x)+f(x+1)-2\displaystyle\int_0^1 f(x+t)dt$ は、 $n-2$ 次である。（証明終）