1980 年京大文 $\boxed{5}$

集合 S の要素を小さい順に並べ替えたものが、等差数列になっているかを調べればよい。

並べ替えた $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ が、$0 < b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n$ を満たしているとき

$b_2 - b_1$ は S に含まれ、b_2 より小さいから　$b_2 - b_1 = b_1$　$\therefore b_2 = 2b_1$

$b_n = nb_1$ と予想できる。$n = 1,\ 2$ のとき成立。$n \leqq k$ のとき、$b_k = kb_1$ と仮定する。

$b_{k+1} - b_k$ は S に含まれ、b_{k+1} より小さいから

$b_{k+1} - b_k = b_i = ib_1\ (1 \leqq i \leqq k)$　$b_{k+1} = b_k + b_i = (k+i)b_1$

ここで、$b_{k+1} - b_1 = (k+i-1)b_1$ は S に含まれるが、$2 \leqq i$ のとき

$(k+1)b_1 \leqq (k+i-1)b_1 < (k+i)b_1$　$kb_1 < (k+i-1)b_1 < (k+i)b_1$　$\therefore b_k < (k+i-1)b_1 < b_{k+1}$

$2 \leqq i$ のとき、$b_{k+1} - b_1$ が S に含まれない。$i = 1$ に限られるから　$\therefore b_{k+1} = (k+1)b_1$

したがって $n = k+1$ でも成立。

以上により、$b_n = nb_1$ であるから、等差数列であることが示された。（証明終）