1980年京大理$\boxed{6}$

（i）

$f(0)=g(0)h(0)=1$であり、$g(x),\ h(x)$は整数係数の多項式であるから、$g(0),\ h(0)$は整数。
したがって、$g(0)=h(0)=1$または$g(0)=h(0)=-1$であるから、題意は示された。（証明終）

（ii）

$g(x),\ h(x)$のどちらも定数でないならば、一方が1次式でもう一方が3次式か、両方とも2次式か、いずれかである。$g(x),\ h(x)$のいずれも、最高次の係数は1か-1であるから

$g(x)$が1次式のとき　$g(x)=\pm x+c$という形になる。
(1)より$g(0)=h(0)=\pm 1$であり、同様に$g(1)=h(1)=\pm 1$である。
$g(0)\neq g(1)$であるから、$g(0)=1,\ g(1)=-1$か、$g(0)=-1,\ g(1)=1$のいずれかでなければならない。
$g(0)=1,\ g(1)=-1$を満たす1次式$g(x)$は　$g(x)=-2x+1$
$g(0)=-1,\ g(1)=1$を満たす1次式$g(x)$は　$g(x)=2x-1$
いずれにしても、$g(x)=\pm x+c$という形にはならず、不適。$h(x)$が1次式としても同様である。

したがって、$g(x),\ h(x)$は両方とも2次式である。
(1)より、$g(0)=h(0)=\pm 1,\ g(1)=h(1)=\pm 1,\ g(a)=h(a)=\pm 1$であり、$g(x),\ h(x)$は相違なる3つの$x$について値が一致するから、$g(x)=h(x)$が示された。（証明終）

（iii）

$g(0)=-1$のとき、例えば$g(x)=x^2+cx-1$とおける。さらに$g(1)=-1$とすると

$g(1)=1+c-1=c=-1 \quad \therefore g(x)=x^2-x-1$

このとき、$g(-1)=g(2)=1$であるから、$f(x)=\{g(x)\}^2$とすると、$f(0)=f(1)=f(-1)=f(2)=1$が成立する。

$\therefore f(x)=x(x-1)(x+1)(x-2)+1=(x^2-x-1)^2$

したがって、求める例の一組は　$\therefore a=-1,\ b=2$　……(答)