1981年京大文 $\boxed{1}$

(1)

条件より、 $A(a,\ 0),\ B(0,\ b)\ (a\neq 0,\ b\neq 0)$ とおける。

ベクトルの一次独立性により、実数 $s,\ t$ によって、 $\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix} sa \\ tb \end{pmatrix}$ と表すことができる。

$$f(\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OA}=sf(\overrightarrow{OA})+tf(\overrightarrow{OB})=s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ sb \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} sta \\ t^2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sta \\ (s+t^2)b \end{pmatrix} \quad sta=a,\ (s+t^2)b=0 \quad (st-1)a=0,\ (s+t^2)b=0$$

$a\neq 0,\ b\neq 0$ であるから　$st-1=0,\ s+t^2=0$　$st=1$ ——① 　$s=-t^2$ ——②

②を①に代入すると　$-t^3=1$　$t^3=-1$　$t^3+1=(t+1)(t^2-t+1)=0$

$t^2-t+1=0$ とすると、 $D=1-4=-3<0$ より、実数解を持たない。適するのは $t=-1$ のみ。

したがって、 $s=t=-1$ であるから

$$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB} \quad \therefore \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$ （証明終）

(2)

$a>0$ として、 $A(a,\ 0),\ B(0,\ a),\ C(-a,\ -a)$ とする。

ベクトルの一次独立性により、実数 $s,\ t$ によって、 $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix} sa \\ ta \end{pmatrix}$ と表すことができる。

$$f(\overrightarrow{OP})=sf(\overrightarrow{OA})+tf(\overrightarrow{OB})=s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix} 0 \\ sa \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -ta \\ -ta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -ta \\ (s-t)a \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot f(\overrightarrow{OP})=-sta^2+t(s-t)a^2=-t^2a^2=0$$

$a^2\neq 0$ であるから　$t^2=0$　$\therefore t=0$　$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} sa \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから、点 P は x 軸上にある。（証明終）