1981 年京大文 $\boxed{2}$

$$x_{n+1}-py_{n+1}=x_n+py_n \quad px_{n+1}+y_{n+1}=-px_n+y_n$$

定義により、x_n, y_n が有理数であることはあきらかである。x_{n+1}, y_{n+1} について解くと

$$x_{n+1}=\frac{1-p^2}{1+p^2}x_n+\frac{2p}{1+p^2}y_n \quad y_{n+1}=-\frac{2p}{1+p^2}x_n+\frac{1-p^2}{1+p^2}y_n$$

これより

$$x_{n+1}{}^2+y_{n+1}{}^2=\frac{(1-p^2)^2x_n{}^2+4p(1-p^2)x_ny_n+4p^2y_n{}^2+4p^2x_n{}^2-4p(1-p^2)x_ny_n+(1-p^2)^2y_n{}^2}{(1+p^2)^2}$$

$$=\frac{\left\{(1-p^2)^2+4p^2\right\}(x_n{}^2+y_n{}^2)}{(1+p^2)^2}=\frac{(1+p^2)^2(x_n{}^2+y_n{}^2)}{(1+p^2)^2}=x_n{}^2+y_n{}^2$$

$$\therefore x_{n+1}{}^2+y_{n+1}{}^2=x_n{}^2+y_n{}^2$$

したがって、$x_n{}^2+y_n{}^2$ は一定であるから、P_n は定円 $x^2+y^2=x_1{}^2+y_1{}^2$ 上にある。(証明終)

(注)

$p=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とすると $\quad \dfrac{1-p^2}{1+p^2}=\dfrac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=\cos\theta \quad \dfrac{2p}{1+p^2}=\dfrac{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}+\sin^2\dfrac{\theta}{2}}=\sin\theta$

$$x_{n+1}=x_n\cos\theta+y_n\sin\theta,\ y_{n+1}=-x_n\sin\theta+y_n\cos\theta \quad \therefore \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

P_{n+1} は、P_n を原点中心に $-\theta$ 回転した点であることがわかる。