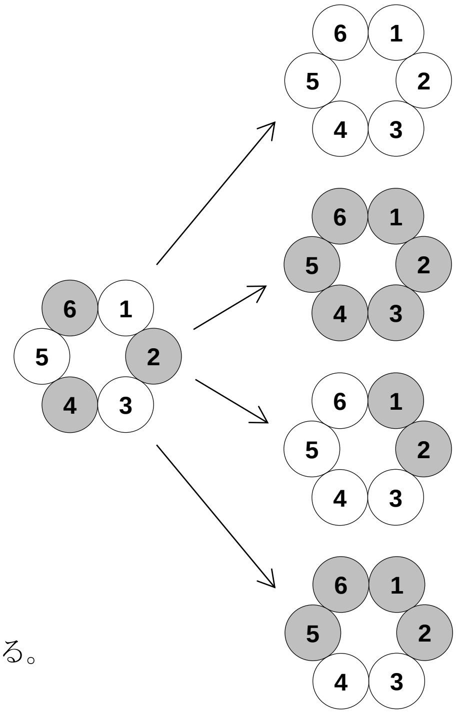
1981 年京大文 $\boxed{4}$

図のように番号をつけ、最初に①③⑤が白、②④⑥が赤とする。



1 回目は、①対②、③対④、⑤対⑥でジャンケンをする。

3 組のジャンケンの勝敗の組み合わせは、$2^3=8$ 通り。

①・③・⑤が勝てば、全員が白になり、ゲームが終わる。

②・④・⑥が勝てば、全員が赤になり、ゲームが終わる。

これ以外のとき、

　i) ある隣り合った 2 人が白で、残り 4 人が赤。

　ii) ある隣り合った 2 人が赤で、残り 4 人が白。

のいずれかである。

例えば、②・③・⑤が勝てば、①②が赤、③④⑤⑥が白になる。

②・③・⑥が勝てば、①②⑤⑥が赤、③④が白になる。

1 回目は、確率 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ でゲームが終わり、確率 $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ で 2 回目に移る。

2 回目以降、例えば①②が赤、③④⑤⑥が白の状態のとき、①対⑥、②対③でジャンケンをする。

2 組のジャンケンの勝敗の組み合わせは、$2^2=4$ 通り。

③・⑥が勝てば、全員が白になり、ゲームが終わる。

これ以外のとき、i) または ii) の状態になる。

2 回目以降、i) か ii) の状態にあるとき、ゲームが終わらなければ、i) か ii) の状態のままである。

2 回目以降は、確率 $\frac{1}{4}$ でゲームが終わり、確率 $\frac{3}{4}$ で次回のゲームに移る。

以上により、各回のゲームにおいて、確率 $\frac{1}{4}$ でゲームが終わり、確率 $\frac{3}{4}$ で次回のゲームに移る。

n 回まででゲームが終わらない確率は、$\left(\frac{3}{4}\right)^n$ であるから、n 回までにゲームが終わる確率は、

余事象により　$1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ……(答)

(注)

余事象を用いなくても、計算は容易。

k 回目でゲームが終わる確率は $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ であるから、求める確率は　$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}=\frac{1}{4}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$