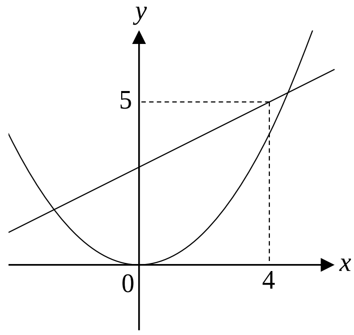
1981 年京大理 $\boxed{1}$

点 (4, 5) を通る直線を、 $y = m(x-4)+5$ とすると

$$\frac{1}{4}x^2 = m(x-4)+5 \qquad x^2-4mx+16m-20=0 \text{ ——①}$$



2 点 P, Q の x 座標を $p, q\,(p<q)$ とすると、それらは①の 2 解である。

解と係数の関係より $\quad p+q=4m,\ pq=16m-20$ ——②

線分 PQ の長さを L とすると

$$L^2=(q-p)^2+\frac{1}{16}(q^2-p^2)^2=(q-p)^2\left\{1+\frac{1}{16}(q+p)^2\right\}$$

②より

$$(q-p)^2=(q+p)^2-4pq=16m^2-64m+80=16(m^2-4m+5)$$
$$L^2=16(m^2-4m+5)(1+m^2)=16(m^4-4m^3+6m^2-4m+5)$$

$f(m)=m^4-4m^3+6m^2-4m+5$ とすると $\quad f'(m)=4m^3-12m^2+12m-4=4(m-1)^3$

$f(m)$ の増減は右の通りで、$m=1$ のとき最小である。

m	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(m)$	$-$	0	$+$
$f(m)$	$\searrow$		$\nearrow$

このとき $\quad L^2=16f(1)=16\cdot 4 \quad \therefore L=8$

L の最小値を与える傾きは 1、最小値は 8 ……(答)