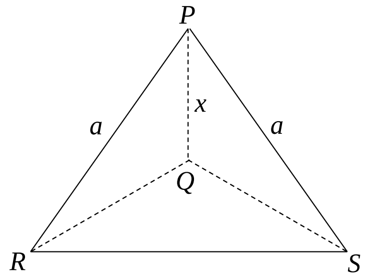
1981年京大理 $\boxed{4}$ 文 $\boxed{5}$ 共通

(1)



$\triangle QRS$ を底面とし、$PQ=x\ (0<x<a)$ とすると　$QR=QS=\sqrt{a^2-x^2}$

$\triangle QRS$ の面積は、$\dfrac{1}{2}(a^2-x^2)$ であるから、四面体 $PQRS$ の体積 $V_1(x)$ は

$$V_1(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(a^2-x^2)\cdot x=\frac{1}{6}x(a^2-x^2)$$

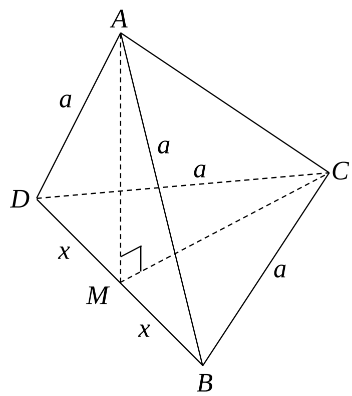
$$V_1'(x)=\frac{1}{6}(a^2-3x^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}+x\right)\left(\frac{a}{\sqrt{3}}-x\right)$$

増減は右の通りで、$x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ において最大となるから、

求める最大値は　$V_1\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2}{3}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{27}a^3$　……(答)

x	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	a
$V_1'(x)$		＋	0	－	
$V_1(x)$		↗		↘	

(2)



$\triangle BCD$ を底面とし、頂点 A を、BD を軸として回転させる。
$\triangle BCD$、$\triangle ABD$ は二等辺三角形である。

BD の中点を M とし、$BM=MD=x\ (0<x<a)$ とすると

$$AM=CM=\sqrt{a^2-x^2}$$

四面体 $ABCD$ の体積が最大になるのは、高さが最大になるとき、
すなわち、$\angle AMC$ が直角であるときである。

このとき、$\triangle BCD$ の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot 2x\cdot\sqrt{a^2-x^2}=x\sqrt{a^2-x^2}$ 、高さは $\sqrt{a^2-x^2}$ であるから

四面体 $ABCD$ の体積 $V_2(x)$ は　$V_2(x)=\dfrac{1}{3}\cdot x\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}=\dfrac{1}{3}x(a^2-x^2)$

(1)より、$V_2(x)$ は $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ のとき最大となるから、求める最大値は　$2\times\dfrac{\sqrt{3}}{27}a^3=\dfrac{2\sqrt{3}}{27}a^3$　……(答)