1981年京大理 $\boxed{6}$

(1)

$$\int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\int_a^x\left(-\frac{1}{t}\right)(-te^{-\frac{t^2}{2}})dt=\int_a^x\left(-\frac{1}{t}\right)(e^{-\frac{t^2}{2}})'dt$$

$$=\left[-\frac{1}{t}e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_a^x-\int_a^x\frac{1}{t^2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{a}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}-\int_a^x\frac{1}{t^2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$0<a\leqq x$であるから、$\displaystyle\int_a^x\frac{1}{t^2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\geqq 0$より　$\displaystyle\therefore\int_a^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\leqq\frac{1}{a}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$　（証明終）

等号成立は$x=a$のとき。

(2)

$$\int_3^b e^{-\frac{t^2}{2}+2t}dt=\int_3^b e^{-\frac{(t-2)^2}{2}+2}dt=e^2\int_3^b e^{-\frac{(t-2)^2}{2}}dt$$

$s=t-2$とおくと、$ds=dt$であるから　$\displaystyle\int_3^b e^{-\frac{(t-2)^2}{2}}dt=\int_1^{b-2}e^{-\frac{s^2}{2}}ds$

$b>3$であるから、(1)より　$\displaystyle\int_1^{b-2}e^{-\frac{s^2}{2}}ds<e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{b-2}e^{-\frac{(b-2)^2}{2}}$

$$\therefore\int_3^b e^{-\frac{t^2}{2}+2t}dt=e^2\int_1^{b-2}e^{-\frac{s^2}{2}}ds<e^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{b-2}e^{-\frac{(b-2)^2}{2}+2}<e^{\frac{3}{2}}$$　（証明終）