1982年京大文 $\boxed{3}$

(1)

$P(t,\ t^3-t)\ (t\neq 0)$ とすると、P における C の接線 l は　$y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t=(3t^2-1)x-2t^3$

$x^3-x=(3t^2-1)x-2t^3$ とすると　$x^3-3t^2x+2t^3=0$　$(x-t)^2(x+2t)=0$

したがって、C と l は $x=-2t$ において交差するから、P と異なる交点 Q を持つ。（証明終）

(2)

C と線分 PQ で囲まれた部分を、$x=0$ で分割し、P を含む側の面積を S_1、Q を含む側の面積を S_2 とする。

$$S_1=\left|\int_0^t\left\{x^3-x-(3t^2-1)x+2t^3\right\}dx\right|=\left|\int_0^t(x^3-3t^2x+2t^3)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}t^2x^2+2t^3x\right]_0^t\right|$$

$$=\left|\frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^4+2t^4\right|=\frac{3}{4}t^4$$

同様に

$$S_2=\left|\int_0^{-2t}(x^3-3t^2x+2t^3)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}t^2x^2+2t^3x\right]_0^{-2t}\right|=\left|4t^4-6t^4-4t^4\right|=6t^4$$

したがって　$S_1:S_2=\frac{3}{4}t^4:6t^4=1:8$　……（答）

※理系 $\boxed{1}$ において $a=-1$ としているが、a によらないので、結果は同じである。

絶対値を考えれば、t の符号による場合分けは不要。