1982 年京大文 $\boxed{4}$

(1)

$$A^2=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & bc+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$b(a+d)=c(a+d)=0$ であり、$b\neq 0$ より　$a+d=0$　$\therefore d=-a$

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\ cx-ay\end{pmatrix}\qquad \frac{x+x'}{2}=\frac{(1+a)x+by}{2},\ \frac{y+y'}{2}=\frac{cx+(1-a)y}{2}$$

ここで、$a^2+bc=1$ より　$bc=1-a^2$　$b\neq 0$ より　$\therefore c=\dfrac{1-a^2}{b}$

これより　$\dfrac{y+y'}{2}=\dfrac{(1-a^2)x+(1-a)by}{2b}=\dfrac{1-a}{b}\cdot\dfrac{(1+a)x+by}{2}=\dfrac{1-a}{b}\cdot\dfrac{x+x'}{2}$

したがって、$PQ$ の中点は、原点を通る定直線 $y=\dfrac{1-a}{b}x$ 上にある。（証明終）

(2)

$\overrightarrow{PQ}=((a-1)x+by,\ cx-(a+1)y)$ であり、$l$ に平行なベクトルの 1 つは $\vec{k}=(b,\ 1-a)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{k}&=(a-1)bx+b^2y+(1-a)cx+(a^2-1)y=(a-1)(b-c)x+(b^2-bc)y\\&=(b-c)\{(a-1)x+by\}\end{aligned}$$

$P(x,\ y)$ に関わらず、常に $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{k}=0$ となるには　$b-c=0$　$\therefore b=c$

逆に、$b=c$ であるとき、$\overrightarrow{PQ}=((a-1)x+by,\ bx-(a+1)y)$ であり、$a^2+b^2=1$ であるから

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{k}=(a-1)bx+b^2y+(1-a)bx+(a^2-1)y=(a-1)bx+(1-a^2)y+(1-a)bx+(a^2-1)y=0$$

したがって、$P(x,\ y)$ に関わらず、常に $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{k}=0$ が成立する。

以上により、$PQ$ が常に $l$ と垂直であるための必要十分条件は、$b=c$ である。（証明終）