1982年京大文$\boxed{5}$

(1)

4点A, B, C, Dの、原点Oを基準とした位置ベクトルを考える。

$\overrightarrow{OA_1}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{3}$, $\overrightarrow{OB_1}=\dfrac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}}{3}$, $\overrightarrow{OC_1}=\dfrac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$, $\overrightarrow{OD_1}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$であり、

直線AA_1上の点P_Aは、実数aを用いて、$\overrightarrow{OP_A}=(1-a)\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OA_1}=(1-a)\overrightarrow{OA}+\dfrac{a}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$と表せる。

同様に、直線BB_1上の点P_B、直線CC_1上の点P_C、直線DD_1上の点P_Dは、実数b, c, dを用いて、それぞれ

$$\overrightarrow{OP_B}=(1-b)\overrightarrow{OB}+\frac{b}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}),\ \overrightarrow{OP_C}=(1-c)\overrightarrow{OC}+\frac{c}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),$$

$$\overrightarrow{OP_D}=(1-d)\overrightarrow{OC}+\frac{d}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

と表せる。ここで、$a=b=c=d=\dfrac{3}{4}$とすれば、$\overrightarrow{OP_A}=\overrightarrow{OP_B}=\overrightarrow{OP_C}=\overrightarrow{OP_D}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$となる。

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{4}$は、線分の$AA_1$, BB_1, CC_1, DD_1の、内分点かつ共有点である。

2点以上を共有することはないから、題意は示された。(証明終)

(2)

(1)より、$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA_1}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OB_1}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OC_1}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OD}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OD_1}$であるから

$\therefore AP:PA_1=BP:PB_1=CP:PC_1=DP:PD_1=3:1$ ……(答)

※(1)は理系$\boxed{3}$と共通。