

1982 年京大理 1

(1)

$P(t, t^3 + at)$ ($t \neq 0$) とすると、 P における C の接線 l は $y = (3t^2 + a)(x - t) + t^3 + at = (3t^2 + a)x - 2t^3$

$x^3 + ax = (3t^2 + a)x - 2t^3$ とすると $x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0$ $(x - t)^2(x + 2t) = 0$

したがって、 C と l は $x = -2t$ において交差するから、 P と異なる交点 Q を持つ。(証明終)

(2)

C と線分 PQ で囲まれた部分を、 $x = 0$ で分割し、 P を含む側の面積を S_1 、 Q を含む側の面積を S_2 とする。

$$\begin{aligned} S_1 &= \left| \int_0^t \{x^3 + ax - (3t^2 + a)x + 2t^3\} dx \right| = \left| \int_0^t (x^3 - 3t^2x + 2t^3) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}t^2x^2 + 2t^3x \right]_0^t \right| \\ &= \left| \frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^4 + 2t^4 \right| = \frac{3}{4}t^4 \end{aligned}$$

同様に

$$S_2 = \left| \int_0^{-2t} (x^3 - 3t^2x + 2t^3) dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}t^2x^2 + 2t^3x \right]_0^{-2t} \right| = \left| 4t^4 - 6t^4 - 4t^4 \right| = 6t^4$$

したがって $S_1 : S_2 = \frac{3}{4}t^4 : 6t^4 = 1 : 8$ …… (答)

※絶対値を考えれば、 t の符号による場合分けは不要。