1982年京大理 $\boxed{6}$

(1)

$$f'(x)=(x+1)e^{-|x+1|}-xe^{-|x|}$$

$-1\leqq x\leqq 0$ のとき　$0\leqq x+1\leqq 1$ であるから　$f'(x)=(x+1)e^{-x-1}-xe^{x}$

$e^{-x-1}>0,\ e^{x}>0$ であり、$x+1\geqq 0,\ -x\geqq 0$ であるから　$\therefore f'(x)\geqq 0$

したがって、$f(x)$ は $-1\leqq x\leqq 0$ において単調増加であるから　$\therefore f(-1)\leqq f(x)\leqq f(0)$　（証明終）

(2)

$x\leqq -1$ のとき　$f'(x)=(x+1)e^{x+1}-xe^{x}=e^{x}\{e(x+1)-x\}=e^{x}\{(e-1)x+e\}$

$0\leqq x$ のとき　$f'(x)=(x+1)e^{-x-1}-xe^{-x}=e^{-x-1}\{(x+1)-ex\}=-e^{-x-1}\{(e-1)x-1\}$

$f(x)$ の増減は右の通り。

x	$\cdots$	$-\dfrac{e}{e-1}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{e-1}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗	↗	↗	↗	↗		↘

$te^{-|t|}$ は奇関数であるから、$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} te^{-|t|}dt=0$ であり、$x<-\dfrac{1}{2}$ のとき $f(x)<0$、$x>-\dfrac{1}{2}$ のとき $f(x)>0$。

$f(x)$ が最大になるのは $x=\dfrac{1}{e-1}$ のとき、最小になるのは $x=-\dfrac{e}{e-1}$ のとき。……(答)