1983 年京大文 $\boxed{1}$

(1)

ちょうど点 n に到達するのは、点 $n-1$ にいるとき表が出るか、点 $n-2$ にいるとき裏が出るか、いずれかの場合

であるから　$\therefore p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{2} p_{n-2}$ ……(答)

(2)

$p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{2} p_{n-2}$ を変形して　$p_n + \frac{1}{2} p_{n-1} = p_{n-1} + \frac{1}{2} p_{n-2}$

これより、$n \geqq 3$ において、$p_n + \frac{1}{2} p_{n-1}$ は一定である。

$p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ であるから　$p_n + \frac{1}{2} p_{n-1} = p_2 + \frac{1}{2} p_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$

$p_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_{n-1} - \frac{2}{3}\right)$　$p_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$

$\therefore p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$ ……(答)　$n = 1, 2$ においても成立する。