1983 年京大理 $\boxed{5}$

時刻 t から時間 T 経過後に、P が Q に到達するとする。
時刻 $t+T$ における Q の座標を $Q_{t+T}(0,\ t+T-b)$、時刻 t における P の座標を $P_t(t-a,\ 0)$ とすると

$$P_tQ_{t+T}=\sqrt{(t+T-b)^2+(t-a)^2}=\sqrt{2}T \qquad (T+t-b)^2+(t-a)^2=T^2+2(t-b)T+(t-a)^2+(t-b)^2=2T^2$$

$$T^2-2(t-b)T-(t-a)^2-(t-b)^2=0 \qquad T=(t-b)\pm\sqrt{(t-a)^2+2(t-b)^2}$$

このうち、$T>0$ となるのは、$T=(t-b)+\sqrt{(t-a)^2+2(t-b)^2}$ のみである。

$T(t)=(t-b)+\sqrt{(t-a)^2+2(t-b)^2}$ とすると

$$T'(t)=1+\frac{(t-a)+2(t-b)}{\sqrt{(t-a)^2+2(t-b)^2}}=1+\frac{3t-(a+2b)}{\sqrt{3t^2-2(a+2b)t+a^2+2b^2}}$$

$$T''(t)=\frac{3\sqrt{3t^2-2(a+2b)t+a^2+2b^2}-\{3t-(a+2b)\}\cdot\dfrac{3t-(a+2b)}{\sqrt{3t^2-2(a+2b)t+a^2+2b^2}}}{3t^2-2(a+2b)t+a^2+2b^2}$$

$$=\frac{3\{3t^2-2(a+2b)t+a^2+2b^2\}-\{3t-(a+2b)\}^2}{\{3t^2-2(a+2b)t+a^2+2b^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{9t^2-6(a+2b)t+3a^2+6b^2-9t^2+6(a+2b)t-(a+2b)^2}{\{3t^2-2(a+2b)t+a^2+2b^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{2a^2+2b^2-4ab}{\{3t^2-2(a+2b)t+a^2+2b^2\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{2(b-a)^2}{\{3t^2-2(a+2b)t+a^2+2b^2\}^{\frac{3}{2}}}>0$$

$T'(t)$ は単調増加である。$T'(t)=0$ となる t が存在するとき

$$\sqrt{3t^2-2(a+2b)t+a^2+2b^2}=(a+2b)-3t>0$$

$(a+2b)-3t>0$ の条件下で、両辺を 2 乗すると

$$3t^2-2(a+2b)t+a^2+2b^2=(a+2b)^2-6(a+2b)t+9t^2 \qquad 6t^2-4(a+2b)t+4ab+2b^2=0$$

$$3t^2-2(a+2b)t+b(2a+b)=0 \qquad (t-b)\{3t-(2a+b)\}=0 \qquad \therefore t=b,\ \frac{2a+b}{3}$$

$t=b$ のとき　$(a+2b)-3t=a+2b-3b=a-b<0$ であるから、不適。

$t=\dfrac{2a+b}{3}$ のとき　$(a+2b)-3t=a+2b-(2a+b)=b-a>0$

$T(t)$ の増減は右の通りであるから、$T(t)$ を最小にする t は

$$\therefore t=\frac{2a+b}{3}$$ ……(答)

t	0	$\cdots$	$\dfrac{2a+b}{3}$	$\cdots$
$T'(t)$		$-$	0	$+$
$T(t)$		$\searrow$		$\nearrow$