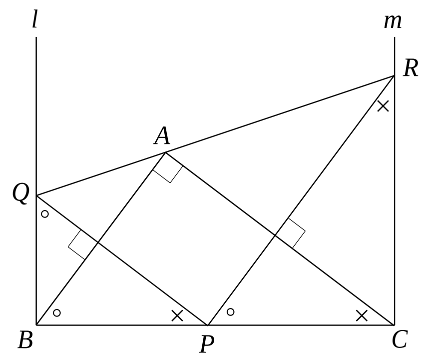
1983年京大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

(1)



$BP:PC=t:1-t\ (0<t<1)$ とすると　$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ ——①

$AB=c,\ AC=b,\ BC=a$ とすると、$a^2=b^2+c^2$ である。

△ABC、△BQP、△CPR の相似性より

$$\frac{PB}{PQ}=\frac{CA}{CB}\quad \frac{ta}{PQ}=\frac{b}{a}\quad PQ=\frac{ta^2}{b}\quad \overrightarrow{AC}=-\frac{AC}{PQ}\overrightarrow{PQ}=-\frac{b^2}{ta^2}\overrightarrow{PQ}\ \text{——②}$$

$$\frac{PC}{PR}=\frac{BA}{BC}\quad \frac{(1-t)a}{PR}=\frac{c}{a}\quad PR=\frac{(1-t)a^2}{c}\quad \overrightarrow{AB}=-\frac{AB}{PR}\overrightarrow{PR}=-\frac{c^2}{(1-t)a^2}\overrightarrow{PR}\ \text{——③}$$

①より、$\overrightarrow{PA}=-(1-t)\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{AC}$ であり、②、③を代入すると　$\overrightarrow{PA}=\frac{c^2}{a^2}\overrightarrow{PR}+\frac{b^2}{a^2}\overrightarrow{PQ}$

$\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2}=1$ より、点 A は直線 PQ 上にあり、題意は示された。（証明終）

(2)

$BQ=\frac{c}{b}BP=\frac{ca}{b}t,\ CR=\frac{b}{c}PC=\frac{ba}{c}(1-t)$ であるから、台形 $BCRQ$ の面積 S_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}BC(BQ+CR)=\frac{1}{2}a\left\{\frac{ca}{b}t+\frac{ba}{c}(1-t)\right\}=\frac{1}{2}a^2\left\{\frac{c}{b}t+\frac{b}{c}(1-t)\right\}$$

△ABC の面積は、$S_2=\frac{1}{2}bc$ であるから

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a^2}{bc}\left\{\frac{c}{b}t+\frac{b}{c}(1-t)\right\}=a^2\left\{\frac{1}{b^2}t+\frac{1}{c^2}(1-t)\right\}=\left(1+\frac{c^2}{b^2}\right)t+\left(1+\frac{b^2}{c^2}\right)(1-t)=\frac{c^2}{b^2}t+\frac{b^2}{c^2}(1-t)+1$$

$\frac{S_1}{S_2}=2$ のとき　$\frac{c^2}{b^2}t+\frac{b^2}{c^2}(1-t)-1=0$　$\frac{c^4}{b^4}t-\frac{c^2}{b^2}+(1-t)=0$　$\left(\frac{c^2}{b^2}-1\right)\left\{\frac{c^2}{b^2}t-(1-t)\right\}=0$

$AB\neq AC$ であるから、$\frac{c^2}{b^2}=1$ は不適。　$\frac{c^2}{b^2}=\frac{1-t}{t}$　$\therefore \frac{c}{b}=\sqrt{\frac{1-t}{t}}$

このとき　$BQ=at\sqrt{\frac{1-t}{t}}=a\sqrt{t(1-t)}$　$CR=a(1-t)\sqrt{\frac{t}{1-t}}=a\sqrt{t(1-t)}$　$\therefore BQ=CR$

したがって、台形 $BCRQ$ は長方形である。……(答)