1984年京大文$\boxed{2}$

(1)

$$f(x+c)-f(x)=2^{\sin(x+c)}-2^{\sin x}=2^{\sin x}(2^{\sin(x+c)-\sin x}-1)$$

$f(x+c)-f(x)=0$ が成り立つのは、$2^{\sin(x+c)-\sin x}=1$、すなわち $\sin(x+c)-\sin x=0$ のとき。

$\sin(x+c)-\sin x=2\cos\left(x+\dfrac{c}{2}\right)\sin\dfrac{c}{2}=0$ のとき、$\cos\left(x+\dfrac{c}{2}\right)=0$ はすべての x について成立しないから

$$\sin\frac{c}{2}=0 \quad \frac{c}{2}=n\pi \quad \therefore c=2n\pi\ (n>0) \quad f(x)=2^{\sin x}$$ は周期関数であり、周期は 2π。

(2)

$$f(x+c)-f(x)=\sin(\sin(x+c))-\sin(\sin x)=2\cos\frac{\sin(x+c)+\sin x}{2}\sin\frac{\sin(x+c)-\sin x}{2}$$

$-1\leqq\sin(x+c)\leqq 1,\ -1\leqq\sin x\leqq 1$ であるから　$-2\leqq\sin(x+c)+\sin x\leqq 2,\ -2\leqq\sin(x+c)-\sin x\leqq 2$

したがって、$-\dfrac{\pi}{2}<-1\leqq\dfrac{\sin(x+c)+\sin x}{2}\leqq 1<\dfrac{\pi}{2},\ -\pi<-1\leqq\dfrac{\sin(x+c)-\sin x}{2}\leqq 1<\pi$ より、

$f(x+c)-f(x)=0$ が成り立つのは、$\dfrac{\sin(x+c)-\sin x}{2}=0$、すなわち $\sin(x+c)-\sin x=0$ のとき。

(1)と条件は同じであるから　$\therefore c=2n\pi\ (n>0)$　$f(x)=\sin(\sin x)$ は周期関数であり、周期は 2π。

※(2)は、理系$\boxed{2}$の(1)と共通。