1984 年京大文 $\boxed{3}$

直線 PQ の傾きは $\dfrac{t-(-t)}{(t+1)-(t-1)}=t$　直線 PQ の式は $y=t(x-t-1)+t=tx-t^2$

実数 t が変化したとき、直線 PQ が通過し得る範囲を考える。

$t^2-xt+y=0$ と変形すると、t に関する 2 次方程式であるから、実数解を持つ条件より

$D=x^2-4y\geqq 0$　$\therefore y\leqq \dfrac{1}{4}x^2$ ――①

t が $0\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くとき、

点 P は、直線 $y=x-1$ 上を、$(1,\ 0)$ から $(2,\ 1)$ まで動く。

点 Q は、直線 $y=-x-1$ 上を、$(-1,\ 0)$ から $(0,\ -1)$ まで動く。

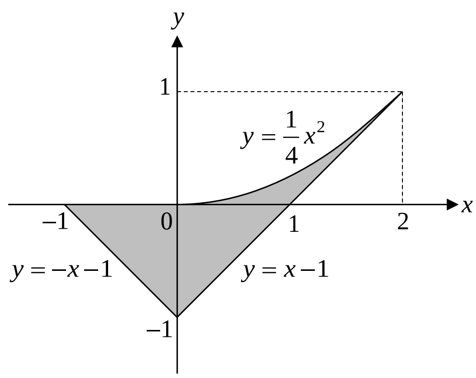
また、$tx-t^2=t(x-2t)+t^2$ より、直線 PQ は、

放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上の点 $(2t,\ t^2)$ における接線である。

接点 $(2t,\ t^2)$ は、放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上を、$(0,\ 0)$ から $(2,\ 1)$ まで動く。

①を考慮すると、$0\leqq t\leqq 1$ において線分 PQ が通過する範囲は、

右図の通りである。



面積は $\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1+\dfrac{1}{4}\int_0^2 x^2dx-\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{6}$ ……(答)

※理系 $\boxed{3}$ の(2)と共通。なぜ理系だけ小問があるのか？