1984 年京大理 $\boxed{2}$

(1)

$$f(x+c)-f(x)=\sin(\sin(x+c))-\sin(\sin x)=2\cos\frac{\sin(x+c)+\sin x}{2}\sin\frac{\sin(x+c)-\sin x}{2}$$

$-1\leqq\sin(x+c)\leqq 1,\ -1\leqq\sin x\leqq 1$ であるから　$-2\leqq\sin(x+c)+\sin x\leqq 2,\ -2\leqq\sin(x+c)-\sin x\leqq 2$

したがって、$-\frac{\pi}{2}<-1\leqq\frac{\sin(x+c)+\sin x}{2}\leqq 1<\frac{\pi}{2},\ -\pi<-1\leqq\frac{\sin(x+c)-\sin x}{2}\leqq 1<\pi$ より、

$f(x+c)-f(x)=0$ が成り立つのは、$\frac{\sin(x+c)-\sin x}{2}=0$ のときに限られる。

$\frac{\sin(x+c)-\sin x}{2}=\cos\left(x+\frac{c}{2}\right)\sin\frac{c}{2}=0$ のとき、$\cos\left(x+\frac{c}{2}\right)=0$ はすべての x について成立しないから

$\sin\frac{c}{2}=0$　$\frac{c}{2}=n\pi$　$\therefore c=2n\pi\ (n>0)$　$f(x)=\sin(\sin x)$ は周期関数であり、周期は 2π 。

(2)

$$f(x+c)-f(x)=\cos(\sin(x+c))-\cos(\sin x)=-2\sin\frac{\sin(x+c)+\sin x}{2}\sin\frac{\sin(x+c)-\sin x}{2}$$

(1) と同様に、$-\pi<-1\leqq\frac{\sin(x+c)+\sin x}{2}\leqq 1<\pi,\ -\pi<-1\leqq\frac{\sin(x+c)-\sin x}{2}\leqq 1<\pi$ であるから、

$f(x+c)-f(x)$ が成り立つのは、$\frac{\sin(x+c)+\sin x}{2}=0$ または $\frac{\sin(x+c)-\sin x}{2}=0$ のとき。

$\frac{\sin(x+c)+\sin x}{2}=\sin\left(x+\frac{c}{2}\right)\cos\frac{c}{2}=0$ のとき　$\cos\frac{c}{2}=0$　$\frac{c}{2}=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$　$\therefore c=(2n-1)\pi\ (n>0)$

$\frac{\sin(x+c)-\sin x}{2}=\cos\left(x+\frac{c}{2}\right)\sin\frac{c}{2}=0$ のとき　(1) より　$\therefore c=2n\pi\ (n>0)$

$f(x)=\cos(\sin x)$ は周期関数であり、c の最小値は π であるから、周期は π 。

(3)

$$f(x+c)-f(x)=\sin((x+c)^3)-\sin(x^3)=2\cos\frac{(x+c)^3+x^3}{2}\sin\frac{(x+c)^3-x^3}{2}$$
$$=2\cos\frac{2x^3+3cx^2+3c^2x+c^3}{2}\sin\frac{3cx^2+3c^2x+c^3}{2}$$

$g(x)=2x^3+3cx^2+3c^2x+c^3$ とすると　$g'(x)=6x^2+6cx+3c^2=6\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{2}c^2>0$

$g(x)$ は、単調増加かつ連続な関数であり、すべての x について $g(x)=(2n-1)\pi\ (n>0)$ にはならない。

また、$h(x)=3cx^2+3c^2x+c^3=3c\left(x+\frac{c}{2}\right)^2+\frac{1}{4}c^3$ は、$\frac{1}{4}c^3$ 以上のすべての値をとる連続な関数であり、

すべての x について $h(x)=2n\pi\ (n>0)$ にはならない。

したがって、$f(x)=\sin(x^3)$ は周期関数ではない。