1984年京大理$\boxed{6}$

(1)

$g(x)=x-f(x)$ とすると　$g'(x)=1-f'(x)$

条件(ハ)により　$g'(x) \geqq 1-k>0$ であるから、$a \leqq x \leqq b$ において、$g(x)$ は単調増加である。

条件(ロ)により　$g(a)=a-f(a) \leqq a-a=0$　$g(b)=b-f(b) \geqq b-b=0$

$g'(x)>0$ より、$g(a)=g(b)=0$ にはならないから、$a \leqq x \leqq b$ において、$g(x)=0$ となる x が、ただ1つ存在する。すなわち、$a \leqq x \leqq b$ において、$f(c_0)=c_0$ を満たす c_0 が、ただ1つ存在する。(証明終)

(2)

$d_0=c_0$ のとき

$d_1=c_0$ であり、以下 $d_2=d_3=\cdots=d_n=c_0$ であるから、$|d_n-c_0|=0$ となり、題意は成立。

$d_0 \neq c_0$ のとき

$d_1 \neq c_0$ であり、以下 $d_2 \neq c_0,\ d_3 \neq c_0,\ \cdots,\ d_n \neq c_0$ であるから、

平均値の定理により、$\dfrac{f(d_{n-1})-f(c_0)}{d_{n-1}-c_0}=\dfrac{d_n-c_0}{d_{n-1}-c_0}=f'(c)$ となるような、d_{n-1} と c_0 の間の実数 c が存在する。

$$\left|\frac{d_n-c_0}{d_{n-1}-c_0}\right|=|f'(c)| \quad |d_n-c_0|=|f'(c)||d_{n-1}-c_0| \leqq k|d_{n-1}-c_0| \quad \therefore |d_n-c_0| \leqq k|d_{n-1}-c_0| \quad \text{——①}$$

①を繰り返し用いれば　$|d_n-c_0| \leqq k|d_{n-1}-c_0| \leqq k^2|d_{n-2}-c_0| \leqq \cdots \leqq k^n|d_0-c_0|$

したがって、$|d_n-c_0| \leqq k^n|d_0-c_0|$ が示された。(証明終)

※ $0 \leqq k<1$ であるから、(2)で示した関係より、$\lim_{n\to\infty} d_n=c_0$ がわかる。