

C 上の点を $\left(t, \frac{1}{t}\right)$ とおくと
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + \frac{b}{t} \\ ct + \frac{d}{t} \end{pmatrix}$$

$$x'y' = \left(at + \frac{b}{t}\right)\left(ct + \frac{d}{t}\right) = act^2 + \frac{bd}{t^2} + ad + bc = 1 \quad act^4 + (ad + bc - 1)t^2 + bd = 0$$

任意の t について成立するには

$$ac = 0 \quad \text{---①} \quad ad + bc - 1 = 0 \quad \text{---②} \quad bd = 0 \quad \text{---③}$$

①より $a=0$ または $c=0$ だが、 $a=c=0$ のとき②を満たさないので、 a, c のうち一方は 0 ではない。

$a=0$ のとき ②より $bc=1$ ③より $d=0$

$c=0$ のとき ②より $ad=1$ ③より $b=0$

$a=d=0, c=\frac{1}{b}$ のとき
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{t} \\ \frac{t}{b} \end{pmatrix} \quad x'y' = 1 \text{ を満たす。}$$

$b=c=0, d=\frac{1}{a}$ のとき
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at \\ \frac{1}{at} \end{pmatrix} \quad x'y' = 1 \text{ を満たす。}$$

以上により、求める必要十分条件は $a=d=0, bc=1$ または $b=c=0, ad=1$ ……(答)