1985年京大理 $\boxed{4}$

(i)

D は球面①と平面②の交差部に現れる円である。

球面①の半径は $\sqrt{\dfrac{r^2+2}{3}}$ で、平面②と原点との距離は $\dfrac{|0+0+0-r|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$ であるから、

D の半径は $\sqrt{\dfrac{r^2+2}{3}-\dfrac{r^2}{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ が最大になるのは、PQ が D の直径に一致するときであるから $\therefore \left|\overrightarrow{PQ}\right| \leqq 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ （証明終）

(ii)

①、②から r を消去すると

$$3x^2+3y^2+3z^2=(x+y+z)^2+2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx+2$$

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=2$$

$$\therefore (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2$$

$(x-y)^2,\ (y-z)^2,\ (z-x)^2$ のうち、いずれか1つは 0 に等しく、他の2つは 1 に等しい。

$(x-y)^2=0$ のとき　$x=y$

$(z-x)^2=1$　$z-x=\pm1$　$z=x\pm1$

$z=x+1$ のとき、②に代入して　$x+x+(x+1)=3x+1=r$　$x=y=\dfrac{r-1}{3},\ z=\dfrac{r+2}{3}$

これらが整数になるには、k を自然数として、$r=3k-2$ でなければならない。

$z=x-1$ のとき、②に代入して　$x+x+(x-1)=3x-1=r$　$x=y=\dfrac{r+1}{3},\ z=\dfrac{r-2}{3}$

これらが整数になるには、$r=3k-1$ でなければならない。

r が3の倍数であるとき、整数解は存在しない。

対称性より、求める整数解は

$$\begin{cases} r=3k-2 \text{のとき} & (x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{r-1}{3},\ \dfrac{r-1}{3},\ \dfrac{r+2}{3}\right),\left(\dfrac{r-1}{3},\ \dfrac{r+2}{3},\ \dfrac{r-1}{3}\right),\left(\dfrac{r+2}{3},\ \dfrac{r-1}{3},\ \dfrac{r-1}{3}\right) \\ r=3k-1 \text{のとき} & (x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{r+1}{3},\ \dfrac{r+1}{3},\ \dfrac{r-2}{3}\right),\left(\dfrac{r+1}{3},\ \dfrac{r-2}{3},\ \dfrac{r+1}{3}\right),\left(\dfrac{r-2}{3},\ \dfrac{r+1}{3},\ \dfrac{r+1}{3}\right) \\ r=3k \text{のとき} & \text{整数解は存在しない} \end{cases} \cdots\cdots(\text{答})$$