1985年京大理 $\boxed{6}$

(2)より　$b\int_a^x f(t)dt = xf(x)$

$b=0$ のとき　$xf(x)=0$　$x \geqq 0$ について成立するには　$\therefore f(x)=0$

$b \neq 0$ のとき　両辺を微分すると

$bf(x) = f(x) + xf'(x)$　$(b-1)f(x) = xf'(x)$

$x>0$ において　$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{b-1}{x}$ であるから

$\log|f(x)| = (b-1)\log x + C = \log(e^C x^{b-1})$　$f(x) = \pm e^C x^{b-1}$

$\pm e^C$ を C で置き換えて　$f(x) = Cx^{b-1}$

(2)より　$bC\int_a^x t^{b-1}dt = bC\left[\dfrac{t^b}{b}\right]_a^x = C(x^b - a^b) = Cx^b$　$Ca^b = 0$

$a=0$ ならば C は任意で、$f(x) = Cx^{b-1}$。$a>0$ ならば $C=0$ で、$f(x)=0$。

以上まとめて　$a>0$ または $b=0$ のとき $f(x)=0$、$a=0$ かつ $b \neq 0$ のとき $f(x) = Cx^{b-1}$ ……(答)