1985 年京大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通　※2020. 12. 1 記載不備を訂正。

条件③より、f は恒等変換ではないから、f によって、3 点 $A,\ B,\ C$ のいずれかは、必ず動く。

条件①より、3 点 $A,\ B,\ C$ は同一直線上にはないので、ベクトル $\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}$ のうち、少なくともいずれか 2 つは、一次独立である。

ベクトル $\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}$ が一次独立であるとすると、実数 $a,\ b$ によって、$\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$ と表すことができる。

今、f によって、3 点 $A,\ B,\ C$ のすべてが動くと仮定する。
条件②より、例えば、f によって、$A\to B,\ B\to C,\ C\to A$ と動くと仮定すると

$f(\overrightarrow{OC})=a\,f(\overrightarrow{OA})+b\,f(\overrightarrow{OB})$ より　$\overrightarrow{OA}=a\overrightarrow{OB}+b\overrightarrow{OC}$　$\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$ に代入すると

$$\overrightarrow{OC}=a(a\overrightarrow{OB}+b\overrightarrow{OC})+b\overrightarrow{OB}=(a^2+b)\overrightarrow{OB}+ab\overrightarrow{OC}\qquad \therefore (1-ab)\overrightarrow{OC}=(a^2+b)\overrightarrow{OB}$$

ここで、$1-ab=0$ とすると、$a^2+b=0$ でなければならないから

$$b=-a^2\qquad 1-ab=1+a^3=(a+1)(a^2-a+1)=0$$

$a^2-a+1=0$ とすると、$D=1-4=-3<0$ より、実数解を持たないから　$\therefore a=b=-1$

$$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\qquad \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})\qquad 3\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\qquad \therefore \overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

これは原点 O が△ABC の重心であることを示しているから、条件①より、不適。

したがって $1-ab\neq 0$ であり、$\overrightarrow{OC}=\dfrac{a^2+b}{1-ab}\overrightarrow{OB}$ であるから、$\overrightarrow{OC}$ は $\overrightarrow{OB}$ の定数倍である。

$f(\overrightarrow{OC})=\dfrac{a^2+b}{1-ab}f(\overrightarrow{OB})$ より　$\overrightarrow{OA}=\dfrac{a^2+b}{1-ab}\overrightarrow{OC}$　$\overrightarrow{OA}$ は $\overrightarrow{OC}$ の定数倍であるから、$\overrightarrow{OB}$ の定数倍である。
これは 3 点 $A,\ B,\ C$ が同一直線上にあることを示しているから、条件①より、不適。

いずれにしても、f によって、3 点 $A,\ B,\ C$ のすべてが動くと仮定すると、不適である。
3 点の動き方が $A\to B,\ B\to C,\ C\to A$ 以外であっても、同様に不適であることが示される。

以上により、3 点 $A,\ B,\ C$ のうち、少なくとも 1 つは f によって動かない。
3 点 $A,\ B,\ C$ のうち 2 点が動かなければ、もう 1 点も動かないから、
3 点 $A,\ B,\ C$ のうち、f によって動かないものは 1 つあって、1 つに限る。（証明終）