1986 年京大文 $\boxed{2}$

L の方程式は　$y=b(x-u)+u^3+au^2=bx+u^3+au^2-bu$

$x^3+ax^2=bx+u^3+au^2-bu$ とすると

$x^3+ax^2-bx-u(u^2+au-b)=0$　$(x-u)\left\{x^2+(u+a)x+(u^2+au-b)\right\}=0$

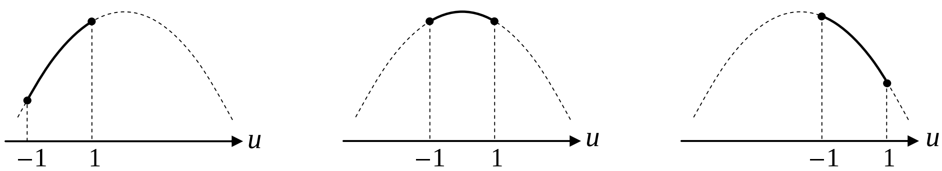
$-1<u<1$ となる任意の u に対し、2 次方程式 $x^2+(u+a)x+(u^2+au-b)=0$ ――① が、$x=u$ 以外の実数解を持つことが条件である。

判別式を求めると　$D=(u+a)^2-4(u^2+au-b)=u^2+2au+a^2-4u^2-4au+4b=-3u^2-2au+a^2+4b$

$-1<u<1$ となる任意の u に対し、$D>0$ となるとき

①は相違なる 2 つの実数解を持つから、少なくとも 1 つの $x=u$ 以外の実数解を持つ。

$D=f(u)$ とすると、上に凸であるから、$f(-1)\geqq 0$ かつ $f(1)\geqq 0$ であればよい。



$f(-1)=-3+2a+a^2+4b=(a+1)^2-4+4b\geqq 0$　$\therefore b\geqq -\dfrac{1}{4}(a+1)^2+1$ ――②

$f(1)=-3-2a+a^2+4b=(a-1)^2-4+4b\geqq 0$　$\therefore b\geqq -\dfrac{1}{4}(a-1)^2+1$ ――③

$-1<u<1$ となる任意の u に対し、$D=0$ とはならない。

求める範囲は、②かつ③であり、右図の通り。

境界線を含む。