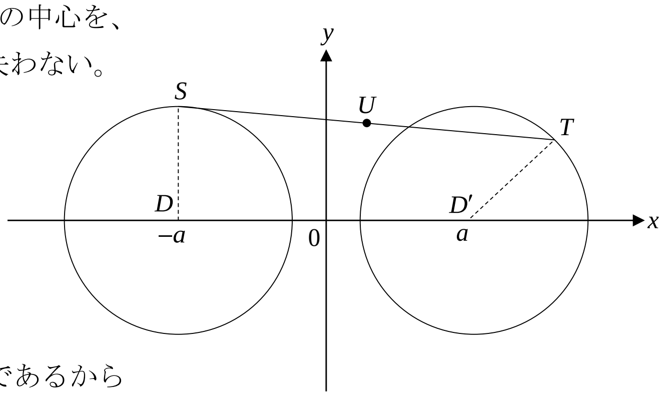
1986年京大理 $\boxed{4}$

(1)

座標平面において、△ABC、△$A'B'C'$ の外接円 C_1, C_2 の中心を、それぞれ $D(-a,\ 0)$, $D'(a,\ 0)$ $(a>0)$ としても、一般性を失わない。
このとき、M は原点 $O(0,\ 0)$ に一致する。



C_1 上、C_2 上の任意の点を、それぞれ
$S(-a+\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $T(a+\cos\beta,\ \sin\beta)$ とおく。
ただし、$0\leqq\alpha<2\pi,\ 0\leqq\beta<2\pi$ とする。
このとき、ST の中点は $U\left(\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{2},\ \dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\right)$ であるから

$$MU^2=OU^2=\frac{1}{4}(\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta)$$
$$=\frac{1}{4}\{2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\}=\frac{1}{2}\{1+\cos(\alpha-\beta)\}$$

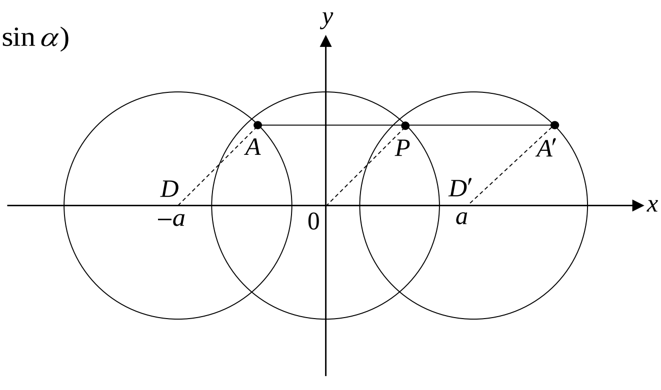
$\cos(\alpha-\beta)\leqq1$ であるから　$MU^2\leqq1$　$\therefore MU\leqq1$
したがって、任意の S, T について、その中点 U は、$MU\leqq1$ を満たすから、題意は示された。(証明終)

(2)

(1)より、P, Q, R の存在範囲は、M を中心とした半径1の円の、周上および内部であるから、
△PQR が鋭角三角形で、外接円の半径が1であれば、その外接円の中心は M である。(証明終)

$A(-a+\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $A'(a+\cos\beta,\ \sin\beta)$ とおく。ただし、$0\leqq\alpha<2\pi,\ 0\leqq\beta<2\pi$ とする。
その中点 P が、$MP=1$ を満たすとき

$$\cos(\alpha-\beta)=1\quad\therefore\alpha=\beta\quad\therefore\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{MP}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$$



同様に、$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{D'B}=\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C}=\overrightarrow{MR}$ も示される。

これより、

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{QR},\ \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{RP}$$

もわかる。

以上により、△ABC、△$A'B'C'$、△PQR はすべて合同となる。(証明終)