1986年京大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

$na_1 \leqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqq na_n$ より　$na_1 \leqq 0 \leqq na_n$　$a_1 \leqq 0 \leqq a_n$

$a_1 = 0$ または $a_n = 0$ のとき

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ となるには $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ でなければならないが、不適。

したがって、少なくとも $a_1 < 0 < a_n$ であり、$n \geqq 2$ である。

$n=2$ のとき

$a_1 + a_2 = 0$ ——① $a_2 = -a_1 > 0$ ——② ①+②より $\therefore a_1 + 2a_2 > 0$

$n=3$ のとき

$a_1 + a_2 + a_3 = 0$ ——① $a_2 + a_3 = -a_1 > 0$ ——② $a_3 > 0$ ——③

①+②+③より $\therefore a_1 + 2a_2 + 3a_3 > 0$

$n \geqq 4$ のとき

$a_k \leqq 0 \leqq a_{k+1}$ となる k $(2 \leqq k \leqq n-1)$ が存在し、$a_1 \leqq \cdots \leqq a_k \leqq 0 \leqq a_{k+1} \leqq \cdots \leqq a_n$ であるから

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n &= 0 \\
a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n &= -a_1 > 0 \\
&\vdots \\
a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n &= -a_1 - a_2 - \cdots - a_{k-1} > 0 \\
a_{k+1} + \cdots + a_n &= -a_1 - a_2 - \cdots - a_k > 0
\end{aligned}
$$

これらを辺々足すと

$a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k + (k+1)(a_{k+1} + \cdots + a_n) > 0$ ——①

一方、$0 \leqq a_{k+1} \leqq \cdots \leqq a_n$ より

$$
\begin{aligned}
a_{k+2} + a_{k+3} + \cdots + a_{n-1} + a_n &> 0 \\
a_{k+3} + \cdots + a_{n-1} + a_n &> 0 \\
&\vdots \\
a_{n-1} + a_n &> 0 \\
a_n &> 0
\end{aligned}
$$

これらと①を辺々足すと

$\therefore a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k + (k+1)a_{k+1} + \cdots + (n-1)a_{n-1} + na_n > 0$

以上により、$n \geqq 2$ において $a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n > 0$ が示された。（証明終）