1986年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

直線OAの式は$y=x$である。$y=x$に関して、$P(p,\ q)$と対称な点は、$P'(q,\ p)$である。

点P_1は、線分PP'の中点であるから　$\therefore \overrightarrow{OP_1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} p+q \\ p+q \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

直線OBの式は$y=-x$である。$y=-x$に関して、$P(p,\ q)$と対称な点は、$P''(-q,\ -p)$である。

点P_2は、線分PP''の中点であるから　$\therefore \overrightarrow{OP_2}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} p-q \\ -p+q \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

これより　$f_{\alpha,\ \beta}(\overrightarrow{OP})=\dfrac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}+\dfrac{\beta}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

一次変換$f_{\alpha,\ \beta}$を表す行列は、$F_{\alpha,\ \beta}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}$で与えられる。

一次変換gを表す行列を、$G=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$とする。$f_{\alpha,\ \beta}\circ g=g\circ f_{\alpha,\ \beta}$となるには、$F_{\alpha,\ \beta}G=GF_{\alpha,\ \beta}$であればよい。

$$F_{\alpha,\ \beta}G=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a+(\alpha-\beta)c & (\alpha+\beta)b+(\alpha-\beta)d \\ (\alpha-\beta)a+(\alpha+\beta)c & (\alpha-\beta)b+(\alpha+\beta)d \end{pmatrix}$$

$$GF_{\alpha,\ \beta}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a+(\alpha-\beta)b & (\alpha-\beta)a+(\alpha+\beta)b \\ (\alpha+\beta)c+(\alpha-\beta)d & (\alpha-\beta)c+(\alpha+\beta)d \end{pmatrix}$$

$$F_{\alpha,\ \beta}G-GF_{\alpha,\ \beta}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\alpha-\beta)(c-b) & (\alpha-\beta)(d-a) \\ (\alpha-\beta)(a-d) & (\alpha-\beta)(b-c) \end{pmatrix}=\frac{\alpha-\beta}{2}\begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

任意の$\alpha,\ \beta$について、$F_{\alpha,\ \beta}G-GF_{\alpha,\ \beta}=O$となるには　$a-d=0,\ b-c=0$　$\therefore a=d,\ b=c$

$G=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$という形になるから、$\alpha'=a+b,\ \beta'=a-b$とすれば、$G=F_{\alpha',\ \beta'}$、すなわち$g=f_{\alpha',\ \beta'}$となる。

逆に、$g=f_{\alpha',\ \beta'}$、$G=F_{\alpha',\ \beta'}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha'+\beta' & \alpha'-\beta' \\ \alpha'-\beta' & \alpha'+\beta' \end{pmatrix}$のとき、

$G=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$という形になるから、$F_{\alpha,\ \beta}G-GF_{\alpha,\ \beta}=O$となり、$f_{\alpha,\ \beta}\circ g=g\circ f_{\alpha,\ \beta}$が成立する。

以上により、任意の$\alpha,\ \beta$について$f_{\alpha,\ \beta}\circ g=g\circ f_{\alpha,\ \beta}$となる必要十分条件は、ある$\alpha',\ \beta'$に対して、$g=f_{\alpha',\ \beta'}$となることである。（証明終）