1987年京大B日程文 $\boxed{3}$

(1)

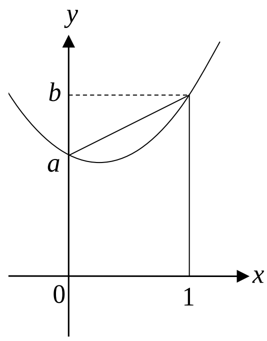
$H$ の式を、$y=a(x-p)^2+q$ とする。$A(0,\ a),\ B(1,\ b)$ を通るから

$a=ap^2+q$ ——① $b=a(1-p)^2+q=a(p^2-2p+1)+q$ ——②

①−②より $a-b=2ap-a$ $2ap=2a-b$ $\therefore\ p=1-\dfrac{b}{2a}$

②より $q=a(1-p^2)=a\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{b^2}{4a^2}\right)=b\left(1-\dfrac{b}{4a}\right)$

$0<\dfrac{b}{2a}<1$



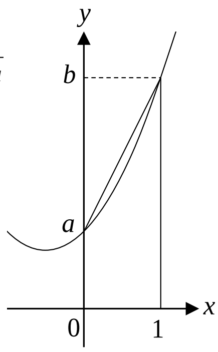

$H$ は下に凸であるから、$H$ の弧 $\overset{\frown}{AB}$ は、線分 $AB$ の下側にある。

$0<\dfrac{b}{2a}<1$ のとき $H$ の軸 $p$ は、$0<p<1$ であり、$\dfrac{b}{2}<q<b$ より $q>0$。

$1\leqq\dfrac{b}{2a}$ のとき $H$ の軸 $p$ は、$p\leqq 0$ であり、$0\leqq x\leqq 1$ において $y\geqq a>0$。

いずれにしても、$H$ の弧 $\overset{\frown}{AB}$ は、台形 $OABC$ の中にある。(証明終)

$1\leqq\dfrac{b}{2a}$




(2)

台形 $OABC$ の面積は $\dfrac{a+b}{2}$ であるから、その半分は $\dfrac{a+b}{4}$。

$H$ の弧 $\overset{\frown}{AB}$ と線分 $AB$ で囲まれた部分の面積は $\displaystyle\int_0^1\left\{a+(b-a)x-a(x-p)^2-q\right\}dx=-a\int_0^1 x(x-1)dx=\frac{a}{6}$

$\dfrac{a+b}{4}=\dfrac{a}{6}$ とすると $\dfrac{a}{12}+\dfrac{b}{4}=0$ $a,\ b$ は正であるから、これは成立しない。

したがって、$H$ の弧 $\overset{\frown}{AB}$ は、台形 $OABC$ の面積を二等分することはない。(証明終)