1987 年京大 B 日程文 $\boxed{4}$

$f(x)=x^3+ax^2+b \qquad f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

$a \geqq 0$ のとき

$0 \leqq x \leqq 1$ において $f'(x) \geqq 0$ であるから単調増加であり、 $f(x)$ の最小値は $f(0)=b \qquad \therefore b>0$

$a<0$ のとき　 $f(x)$ の増減は右の通り。

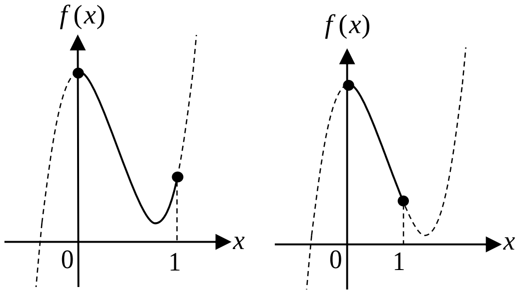
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\dfrac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$-\dfrac{2}{3}a<1 \quad -\dfrac{3}{2}<a<0$ のとき　 $f(x)$ は $x=-\dfrac{2}{3}a$ のとき最小。

$f\left(-\dfrac{2}{3}a\right)=-\dfrac{8}{27}a^3+\dfrac{4}{9}a^3+b=\dfrac{4}{27}a^3+b>0 \qquad \therefore b>-\dfrac{4}{27}a^3$

$1 \leqq -\dfrac{2}{3}a \quad a \leqq -\dfrac{3}{2}$ のとき　 $0 \leqq x \leqq 1$ において単調減少であり、

$x=1$ のとき最小。　 $f(1)=1+a+b>0 \qquad \therefore b>-a-1$



以上をまとめて、

$a \leqq -\dfrac{3}{2}$ のとき $b>-a-1$ 、 $-\dfrac{3}{2}<a<0$ のとき $b>-\dfrac{4}{27}a^3$ 、 $0 \leqq a$ のとき $b>0$

図示すると右の通りで、境界線を含まない。

$b=-a-1$ は、 $a=-\dfrac{3}{2}$ における $b=-\dfrac{4}{27}a^3$ の接線である。