1987 年京大理 $\boxed{5}$

(1)

平面 $ax+y+z+a-2=0$ と垂直なベクトルの 1 つは、$\vec{k}=(a,1,1)$ である。

$\vec{k}$ と平行で、原点を通る直線上の点は、(at,t,t) と表せるから、平面の式に代入すると

$$a^2t+t+t+a-2=(a^2+2)t+a-2=0 \qquad t=\frac{2-a}{a^2+2}$$

求める座標は $\left(\dfrac{2a-a^2}{a^2+2},\ \dfrac{2-a}{a^2+2},\ \dfrac{2-a}{a^2+2}\right)$ ……(答)

(2)

(1) より、原点とこの平面との距離 $d(a)$ は $\quad d(a)=\sqrt{a^2+1+1}\cdot\dfrac{|2-a|}{a^2+2}=\dfrac{|2-a|}{\sqrt{a^2+2}}$

$V(a)$ が最小になるのは、$d(a)$ が最大ときである。$d(a)$ の増減を調べる。

$a<2$ のとき $\quad d(a)=\dfrac{2-a}{\sqrt{a^2+2}}$

$$d'(a)=\frac{-\sqrt{a^2+2}-(2-a)\dfrac{a}{\sqrt{a^2+2}}}{a^2+2}=\frac{-(a^2+2)-(2a-a^2)}{(a^2+2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2(a+1)}{(a^2+2)^{\frac{3}{2}}}$$

$2\leqq a$ のとき $\quad d(a)=\dfrac{a-2}{\sqrt{a^2+2}} \quad d'(a)=\dfrac{2(a+1)}{(a^2+2)^{\frac{3}{2}}}>0$

$d(a)$ の増減は右の通り。$\displaystyle\lim_{a\to\pm\infty}d(a)=\lim_{a\to\pm\infty}\frac{\left|\dfrac{2}{a}-1\right|}{\sqrt{1+\dfrac{2}{a^2}}}=1$ より、

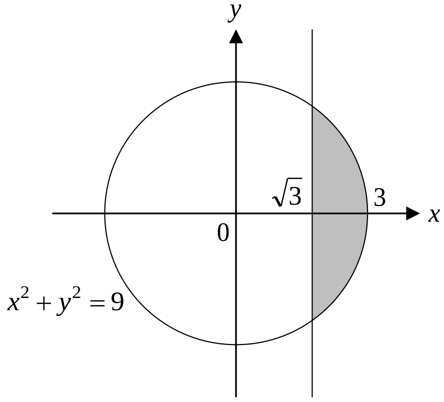
a	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$d'(a)$	+	0	−		+
$d(a)$	↗	$\sqrt{3}$	↘	0	↗

$d(a)$ は $a=-1$ のとき最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

このときの $V(a)$ は、右図の網掛け部を x 軸中心に回転してできる立体の体積に等しい。

$V(a)$ の最小値は

$$\pi\int_{\sqrt{3}}^{3}(9-x^2)dx=\pi\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{\sqrt{3}}^{3}=\pi(27-9-9\sqrt{3}+\sqrt{3})=(18-8\sqrt{3})\pi$$



$V(a)$ を最小にする a は $a=-1$、最小値は $(18-8\sqrt{3})\pi$ ……(答)