1987 年京大理 $\boxed{6}$

(1)

A, B, C 3 人が持つ札の組合せは、3 人とも (赤, 白) か、(赤, 白), (赤, 赤), (白, 白) か、いずれかである。

すべての状態は右の通り。 ……(答)

	A	B	C
F_0	(赤, 白)	(赤, 白)	(赤, 白)
F_1	(赤, 白)	(赤, 赤)	(白, 白)
F_2	(赤, 白)	(白, 白)	(赤, 赤)
F_3	(赤, 赤)	(赤, 白)	(白, 白)
F_4	(白, 白)	(赤, 白)	(赤, 赤)
F_5	(赤, 赤)	(白, 白)	(赤, 白)
F_6	(白, 白)	(赤, 赤)	(赤, 白)

(2)

F_0 の状態にあるとき、3 人がどの札を渡すかは、$2^3=8$ 通り考えられる。
3 人とも赤札を渡すか、3 人とも白札を渡せば、F_0 の状態のままである。
3 人が渡す札が同じでなければ、等確率で $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ のいずれかに移る。
例えば、A が赤札を渡し、B, C が白札を渡せば、F_6 に移る。

$$\therefore p_{00}=\frac{1}{4},\ p_{01}=p_{02}=p_{03}=p_{04}=p_{05}=p_{06}=\frac{1}{8}$$

例えば F_1 の状態にあるとき、B は必ず赤札を、C は必ず白札を渡すから、C が持つ札は (赤, 白) になる。
A が赤札を渡せば F_6 に移り、A が白札を渡せば F_0 に移る。1 回の移動で F_2, F_3, F_4, F_5 に移ることはない。

$$\therefore p_{10}=p_{16}=\frac{1}{2},\ p_{12}=p_{13}=p_{14}=p_{15}=0$$

同様にすべての確率を求め、一覧にすると右の通り。 ……(答)

	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
F_0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
F_1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
F_2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
F_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
F_4	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
F_5	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
F_6	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0

(3)

上記により、F_0 の状態にあるとき、確率 $\frac{1}{4}$ で F_0 に留まり、F_0 の状態にないとき、確率 $\frac{1}{2}$ で F_0 に移るから

$$q_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}(1-q_n)=-\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2} \qquad q_{n+1}-\frac{2}{5}=-\frac{1}{4}\left(q_n-\frac{2}{5}\right)$$

$q_1=\frac{1}{4}$ であるから　$q_n-\frac{2}{5}=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)=-\frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$　$\therefore q_n=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ ……(答)