

1988 年京大 B 日程文 4

$y = -x^3 + 2x^2$ 上の点 $(t, -t^3 + 2t^2)$ における接線の方程式は

$$y = (-3t^2 + 4t)(x - t) - t^3 + 2t^2 = (-3t^2 + 4t)x + 2t^3 - 2t^2$$

これが原点を通るとき、 $t \neq 0$ より $2t^3 - 2t^2 = 2t^2(t - 1) = 0 \quad \therefore t = 1$

$f(x) = -x^3 + 2x^2$ とすると、 $f'(x) = -3x^2 + 4x = x(-3x + 4)$ より

$f(x)$ の増減は右の通り。

これより、 $y = -x^3 + 2x^2$ と $y = x$ で囲まれる領域は、

右図のようになる。

x	...	0	...	$\frac{4}{3}$...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘		↗		↘

面積は

$$\int_0^1 \{x - (-x^3 + 2x^2)\} dx = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \dots\dots (\text{答})$$

