1988 年京大文 $\boxed{1}$

(1)

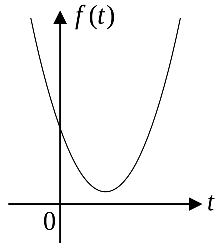
$x^4+2ax^2-a+2=0$ を、x^2 に関する 2 次方程式と見ると、$x^2\geqq 0$ であるから

ｉ) $t^2+2at-a+2=0$ が、実数解を持たない。

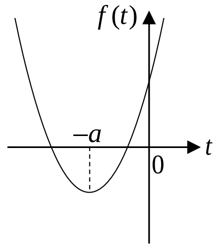
ｉｉ) $t^2+2at-a+2=0$ が、負の実数解のみを持つ。

のいずれかが成り立てばよい。

i)



ii)



ｉ)のとき　$D/4=a^2+a-2=(a+2)(a-1)<0$　$\therefore -2<a<1$ ――①

ｉｉ)のとき　$f(t)=t^2+2at-a+2=(t+a)^2-a^2-a+2$ とすると

$f(0)=-a+2>0$　$\therefore a<2$　軸 $-a<0$　$\therefore 0<a$

$f(-a)=-a^2-a+2\leqq 0$　$(a+2)(a-1)\geqq 0$　$\therefore a\leqq -2,\ 1\leqq a$

以上まとめて　$\therefore 1\leqq a<2$ ――②

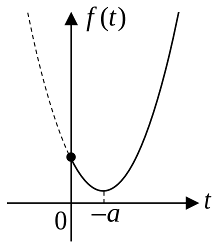
求める範囲は①または②であるから　$\therefore -2<a<2$ ……(答)

(2)

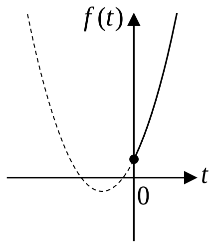
$m(a)$ は、$t\geqq 0$ における、$f(t)=(t+a)^2-a^2-a+2$ の最小値に等しい。

$-2<a<0$ のとき　$m(a)=f(-a)=-a^2-a+2=-\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$ であるから、

$-2<a<0$



$0\leqq a<2$



$a=-\dfrac{1}{2}$ のとき、最大値 $\dfrac{9}{4}$ をとる。

$0\leqq a<2$ のとき　$m(a)=f(0)=-a+2$ であるから、$a=0$ のとき、

最大値 2 をとる。

以上により、$m(a)$ の最大値は $\dfrac{9}{4}$ ……(答)