1988年京大理$\boxed{3}$

(1)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ -x+2y \end{pmatrix}$$

$$x'^2 - 3y'^2 = (2x-3y)^2 - 3(-x+2y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 3(x^2 - 4xy + 4y^2) = x^2 - 3y^2 = 1$$

したがって　$\therefore x'^2 - 3y'^2 = 1$

また、$y - y' = y - (-x+2y) = x - y$、$x^2 - 3y^2 = 1,\ x > 0$ より $x = \sqrt{3y^2+1}$、$y \geqq 1$ であるから

$$y - y' = \sqrt{3y^2+1} - y = y\left(\sqrt{3+\frac{1}{y^2}} - 1\right) > y(\sqrt{3}-1) > 0 \quad \therefore y' < y$$

$y' = -x + 2y < 0$ とすると、$2y < x$ であるから

$$x = \sqrt{3y^2+1} > 2y \quad 3y^2 + 1 > 4y^2 \quad \therefore y^2 < 1 \quad y \geqq 1 \text{ であるから不適。}$$

したがって　$\therefore 0 \leqq y' < y$　以上により示された。(証明終)

(2)

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって整数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を定義すると、$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ である。

(1)より、$y_n > 0$ のとき、$0 \leqq y_{n+1} < y_n$ であるから、数列 $\{y_n\}$ は自然数 $y_0 = y$ から始まって減少し、

ある n において $y_n = 0$ となる。このとき、$x_n{}^2 = 1$ となるが、$x_0 = x = \sqrt{3y^2+1}$ は自然数であるから

$$x_1 = 2x - 3y = 2\sqrt{3y^2+1} - 3y = y\left(2\sqrt{3+\frac{1}{y^2}} - 3\right) > y(2\sqrt{3}-3) > 0$$

$x_1 > 0$ であるから、x_1 は自然数。以下、$x_n > 0,\ y_n > 0$ のとき

$$x_{n+1} = 2x_n - 3y_n = 2\sqrt{3y_n{}^2+1} - 3y_n = y_n\left(2\sqrt{3+\frac{1}{y_n{}^2}} - 3\right) > y_n(2\sqrt{3}-3) > 0$$

より、x_{n+1} は自然数。したがって、ある n において $y_n = 0$ となったとき、$x_{n-1} > 0,\ y_{n-1} > 0$ より　$\therefore x_n = 1$

以上により示された。(証明終)

※1967年理系$\boxed{4}$文系$\boxed{4}$共通に、まったく同じ題材の出題あり。