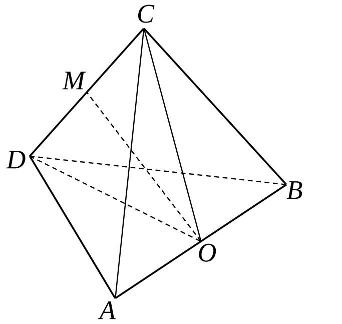
1988 年京大理 $\boxed{4}$

(1)



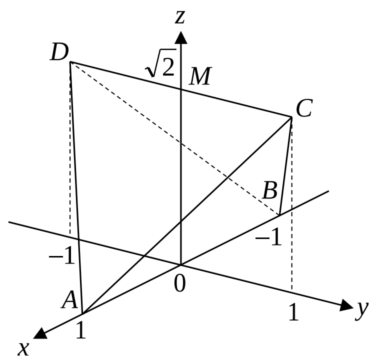
右図のように、正四面体 $ABCD$ の辺 AB の中点 O と、辺 CD を含む平面を考えると、この平面は辺 AB と直交している。辺 CD の中点を M とすると、

$OC=OD=\sqrt{3}$ であり、OM は CD と垂直であるから

$OM^2=3-1=2 \quad \therefore OM=\sqrt{2}$

AB と CD は垂直であり、AB と OM、CD と OM も垂直であるから、

$A(1,\ 0,\ 0),\ O(0,\ 0,\ 0),\ B(-1,\ 0,\ 0),\ M(0,\ 0,\ \sqrt{2})$ ととれば



$C(0, 1,\ \sqrt{2}),\ D(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ ……(答)

(2)

平面 α の式は、$z=\sqrt{2}t$ である。
α と、辺 $AC,\ BC,\ BD,\ AD$ との交点を、それぞれ $P,\ Q,\ R,\ S$ とする。

$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ より、AC 上の点は $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k\\k\\\sqrt{2}k\end{pmatrix}$ と表せる。

これが α 上にあるとき　$\sqrt{2}k=\sqrt{2}t \quad k=t \quad P$ の座標は $(1-t,\ t,\ \sqrt{2}t)$ である。
対称性より、$Q,\ R,\ S$ の座標は、$(-1+t,\ t,\ \sqrt{2}t),\ (-1+t,\ -t,\ \sqrt{2}t),\ (1-t,\ -t,\ \sqrt{2}t)$ であるから、
四角形 $PQRS$ は長方形であり、α による正四面体 $ABCD$ の切り口は、長方形である。……(答)

(3)

(2) より、$z=\sqrt{2}u\ (0<u\leqq t)$ による正四面体 $ABCD$ の切り口の面積は　$S(u)=2(1-u)\times 2u=4(u-u^2)$
$dz=\sqrt{2}du$ であるから、求める体積は

$$\int_0^t S(u)\cdot\sqrt{2}du=4\sqrt{2}\int_0^t(u-u^2)du=4\sqrt{2}\left[\frac{u^2}{2}-\frac{u^2}{3}\right]_0^t=-\frac{4}{3}\sqrt{2}t^3+2\sqrt{2}t^2$$ ……(答)