

1988 年京大理 [6]

(1)

$y=0$  のとき  $x=5$  であり、 $y=8$  のとき  $x=1$  であるから

$$0 = \frac{a}{5} + b, 8 = a + b \quad \therefore a = 10, b = -2$$

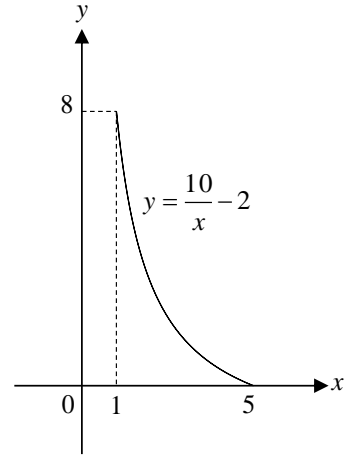
$0 \leq y \leq 8$  における  $y = \frac{10}{x} - 2$  の概形は右の通り。 $x$  について解くと

$$\frac{10}{x} = y + 2 \quad x = \frac{10}{y + 2}$$

これより、水面の高さ  $h$  cm ( $0 \leq h \leq 8$ ) のときの水の体積は

$$\pi \int_0^h \frac{100}{(y+2)^2} dy = \pi \left[ -\frac{100}{y+2} \right]_0^h = \pi \left( 50 - \frac{100}{h+2} \right)$$

$$h=6 \text{ のときの体積は } \pi \left( 50 - \frac{100}{8} \right) = \pi \left( 50 - \frac{25}{2} \right) = \frac{75}{2} \pi \text{ cm}^3 \dots\dots (\text{答})$$



(2)

$h$  は時間  $t$  の関数である。水を入れ始めてから  $t$  秒後の水面の高さを、 $h$  cm とすると

$$\pi \left( 50 - \frac{100}{h+2} \right) = kt \quad \text{両辺を } t \text{ で微分すると } \pi \frac{100}{(h+2)^2} \cdot \frac{dh}{dt} = k \quad \therefore \frac{dh}{dt} = \frac{(h+2)^2 k}{100\pi}$$

$$h=3 \text{ のときの水面の上昇速度は } \frac{5^2 k}{100\pi} = \frac{k}{4\pi} \text{ cm/秒 } \dots\dots (\text{答})$$